Devoir Surveillé n°5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

31 janvier 2015

Exercice 1

1. (a) Il s'agit du nombre de permutations des $2n$ personnes, soit $(2n)!$.
   (b) Il faut d'abord choisir la demi-table où vont se trouver tous les hommes, ce qui peut se faire de $2n$ façons (on choisit par exemple le premier siège occupé par un homme lorsqu'on parcourt la table dans le sens trigonométrique, et il y a $2n$ sièges possibles), puis choisir une permutation des n hommes dans cette moitié de table, et une permutation des n femmes sur les places restantes. Cela fait $(2n) \times n!^2$ positionnements possibles.
   (c) Il y a $2n$ choix possibles pour la personne sur le premier siège, puis n pour le deuxième (si le premier était par exemple un homme, il faut mettre une femme ensuite), $n-1$ pour le troisième et quatrième (un homme puis une femme), $n-2$ pour les deux suivants etc. On obtient donc $2 \times n!^2$ possibilités.
   Autre façon de voir les choses : on choisit si on met un homme ou une femme sur le siège 1 (deux possibilités), et il faut ensuite choisir une permutation des n hommes sur les sièges qui leur sont attribués (par exemple les sièges impairs), et de même pour les femmes sur les autres sièges.
2. (a) Le plus simple est de partir des $(2n)!$ positions obtenues à la première question, et de diviser par le nombre de fois où on va compter chaque possibilité une fois que les sièges ne sont plus importants. Chaque possiblité peut être décalée d'un nombre de sièges compris entre 0 et $2n-1$ sans modifier les voisins de tout le monde, mais on peut aussi renverser l'ordre de parcours de la table (géométriquement, on peut composer chacune des $2n$ rotations par une symétrie pour obtenir $2n$ possibilités supplémentaires), il ne reste donc que $\dfrac{(2n)!}{4n} = \dfrac{(2n-1)!}{2}$ possibilités.
   (b) Même principe que ci-dessus : $\dfrac{2 \times n!^2}{4n} = \dfrac{n!(n-1)!}{2}$.
3. Lorsque $n = 3$, on obtient pour la question 1.a un nombre de possibilités égal à $6! = 720$; pour la question 1.b on tombe à $6 \times 3!^2 = 216$; pour la 1.c il y en aura $2 \times 3!^2 = 72$. En enlevant la distinguabilité des sièges, il ne reste que $\dfrac{5!}{2} = 60$ possibilités au total, et $\dfrac{3! \times 2!}{2} = 6$ avec alternance homme-femme. Ces six possibilités sont les suivantes (en notant les personnes $H1$, $H2$ et $H3$ pour les hommes, $F1$, $F2$ et $F3$ pour les femmes ; en commençant toujours la liste à $H1$) : $H1F1H2F2H3F3$; $H1F1H3F2H2F3$; $H1F1H2F3H3F2$; $H1F1H3F3H2F2$; $H1F2H2F1H3F3$ et $H1F2H3F1H2F3$ (toutes les autres sont obtenues à partir de celles-ci par rotation ou symétrie).

Exercice 2

1. Aucune méthode n'était imposée, mais je vais utiliser un pivot de Gauss puisque la plupart d'entre vous ont opté pour cette méthode :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 0 & 12 & -1 \\ 0 & 12 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 0 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 9 & 12 & -12 \\ 3 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 15 & 18 & -21 \\ 3 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftarrow L_2/12 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 3 & -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

La matrice A est donc inversible, et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 3 & -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Calculons : $P - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, puis $(P-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, et $(P-I)^3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, ce qui est exactement égal à $2P$. On a donc $(P-I)^3 - 2P = 0$, soit en développant tout $P^3 - 3P^2 + P - I = 0$. On peut écrire cette égalité sous la forme $P(P^2 - 3P + I) = I$, la matrice P est donc inversible, d'inverse $P^2 - 3P + I$. On peut alors calculer $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (on vérifie si on le souhaite que ça marche).
3. On calcule encore une fois brillamment $AP = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. De façon extrêmement inattendue, on obtient exactement la même chose pour PT (mais si) !
4. C'est une récurrence hyper classique : pour $n = 0$, on a bien $PT^0P^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$, et si on suppose la formule vraie au rang n, en utilisant le calcul précédent, on aura $A^{n+1} = A \times A^n = APT^nP^{-1} = PTT^nP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$, ce qui prouve la formule au rang $n+1$. Regardons ce qui se passe pour $n = -1$: on calcule d'abord $A^{-1}P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}A^{-1}P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On vérifie facilement que cette matrice est l'inverse de la

matrice T, ce qui prouve que $P^{-1}A^{-1}P = T^{-1}$, ce qui est équivalent à ce qui était demandé. La formule reste donc vraie pour $n = -1$.

5. On va évidemment procéder par récurrence. La propriété est vrai au rang 0 en posant $\alpha_0 = 0$, et aussi au rang 1 en posant $\alpha_1 = 1$. Supposons que ça marche au rang n, alors $T^{n+1} = T \times \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 2\alpha_n + 2^n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$, ce qui est bien de la forme souhaitée avec $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2^n$. Cette suite n'est pas une suite classique, hélas, donc on ne peut pas faire grand chose avec (oui, l'énoncé de la question était un ignoble piège).

6. On pose donc $J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et on obtient immédiatement $J^k = \begin{pmatrix} (-3)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-3)^{k-2}J^2$, pour tout entier $k \geq 2$. Si on tient vraiment à le démontrer par récurrence, on le fait (mais c'est trivial).

7. Puisque $T = J + 2I$, on va appliquer la formule du binome (les matrice $2I$ et J commutant bien évidemment) : $T^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (2I)^{n-k} = 2^n I + n2^{n-1}J + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}(-3)^{k-2}J^2 = 2^n I + n2^{n-1}J + \frac{1}{9}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-3)^k 2^{n-k}J^2 - 2^n J^2 + 3n2^{n-1}J^2\right) = 2^n I + n2^{n-1}J + \frac{((3n-2)2^{n-1} + (-1)^n)}{9}J^2$.
Il n'est en fait pas vraiment utile de détailler le calcul de tous les coefficients de T^n, puisqu'on les connait déjà tous sauf celui égal à α_n (rien n'empêche bien entendu dé vérifier que ça donne bien les bonnes valeurs sur la diagonale, ce qui est le cas). On déduit de la formule précédente que $\alpha_n = n2^{n-1}$ (seule la matrice J a un coefficient non nul à cet endroit), ce qui est cohérent avec la relation de récurrence trouvée pour la suite : $2\alpha_n + 2^n = n2^n + 2^n = (n+1)2^n = \alpha_{n+1}$. Finalement, $T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Il reste ensuite à calculer $PT^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^{n+1} & n2^n \\ 0 & 2^n & (n+2)2^{n-1} \\ (-1)^n & 2^{n+1} & (n+1)2^n \end{pmatrix}$, puis
$A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} (2-n)2^n + (-1)^{n+1} & 2^{n+1} + 2(-1)^{n+1} & (n-2)2^n + 2(-1)^n \\ -n2^{n-1} & 2^n & n2^{n-1} \\ (1-n)2^n + (-1)^{n+1} & 2^{n+1} + 2(-1)^{n+1} & (n-1)2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}$.

8. (a) Supposons que $AM = MA$, alors $AMP = MAP = MPT$, puis $P^{-1}AMP = P^{-1}MPT$, soit $TP^{-1}MP = P^{-1}MPT$. La matrice $P^{-1}MP$ commute bien avec T. La réciproque se fait exactement de la même façon.

   (b) Bourrinons en posant $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on a alors $BT = \begin{pmatrix} -a & 2b & b+2c \\ -d & 2e & e+2f \\ -g & 2h & h+2i \end{pmatrix}$, et $TB = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$. Les deux matrices sont égales si $b = c = d = g = h = 0$ (conditions obtenus facilement en regardant les coefficients hors de la diagonale), et $e = i$ (à cause du coefficient deuxième ligne troisième colonne). Autrement dit, $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.

   (c) Le calcul de la question a prouve que les matrices commutant avec A sont de la forme

PBP^{-1}, où B commute avec T. On calcule donc $PB = \begin{pmatrix} a & 2e & 2f \\ 0 & e & e+f \\ a & 2e & e+2f \end{pmatrix}$, puis $PBP^{-1} = \begin{pmatrix} -a+2e-2f & -2a+2e & 2a-2e+2f \\ -f & e & f \\ -a+e-2f & -2a+2e & 2a-e+2f \end{pmatrix}$. Toutes les matrices de cette forme commutent donc avec A (en particulier A elle-même, qui est obtenue pour $a=-1$, $e=2$ et $f=1$, et la matrice identité obtenue lorsque $a=e=1$ et $f=0$).

Exercice 3

1. La fonction g_n est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ (c'est une somme de deux fonctions croissantes). De plus, $\lim_{x\to 0} g_n(x) = -\infty$, et $\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$. La fonction g_n est donc bijective de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, 0 admet un unique antécédent par g_n.
2. On calcule $g_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \ln\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \ln(n)$. Puisqu'on a supposé $n \geq 3$, $\ln(n) \geq \ln(3) > 1$, et $g_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$. De l'autre côté, $g_n(1) = n > 0$, donc la croissance de la fonction g_n assure que $\frac{1}{n} < u_n < 1$.
3. Par définition, $g_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, ce qu'on peut traduire par $\ln(u_{n+1}) = -(n+1)u_{n+1}$. On calcule alors $g_n u_{n+1} = nu_{n+1} + \ln(u_{n+1}) = -u_{n+1} < 0$. Comme $g_n(u_n) = 0$, la croissance de la fonction g_n permet de conclure que $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.
4. Supposons donc que (u_n) converge vers $l > 0$. Dans ce cas, $\lim_{n\to+\infty} nu_n = +\infty$, et $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln(l)$, ce qui est très contradictoire avec le fait que $nu_n + \ln(u_n) = 0$. Pourtant, la suite étant décroissante et minorée par 0 (puisque $\frac{1}{n} \geq 0$), elle converge nécessairement vers une limite positive ou nulle. La seule possibilité est donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
5. On reprend la définition de la suite : $nu_n = -\ln(u_n)$, et on passe tout au logarithme (tout est positif, on peut), en posant pour simplifier les choses $v_n = \frac{1}{u_n}$: $\ln(n) - \ln(v_n) = \ln(\ln(v_n))$, donc $\ln(n) = \ln(v_n) + \ln(\ln(v_n))$, et $\frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} = 1 + \frac{\ln(\ln(v_n))}{\ln(v_n)}$. On sait que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} \ln(v_n) = +\infty$, et (par croissance comparée), $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln(v_n))}{\ln(v_n)} = 0$. On conclut que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} = 1$. Bien entendu, l'inverse tend aussi vers 1, et $\ln(v_n) = -\ln(u_n)$, donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} = -1$.
6. (a) Posons donc $f(t) = \frac{1}{t} - \ln(1+t) + \ln(t)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $f'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t} + \frac{1}{t} = \frac{-(t+1) - t^2 + t(t+1)}{t^2(t+1)} = \frac{-1}{t^2(t+1)} < 0$. La fonction f est donc décroissante. Or, $f(t) = \frac{1}{t} - \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$, qui a une limite nulle en $+\infty$. On en déduit que f est toujours positive, ce qu'on voulait prouver.

   (b) En appliquant le résultat de la question précédent, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1)$ (il y a un beau télescopage à droite). Comme $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, on en déduit que

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$. Même raisonnement pour S_n : on sait que $u_n \geq \frac{1}{n}$ pour $n \geq 3$, donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Exercice 4

1. (a) Il y a $\binom{a+b}{n}$ possibilités si on ne précise rien sur le nombre de filles ou de garçons.

   (b) Il y a $\binom{a}{n}$ groupes possibles uniquement constitués de garçons (si $n \leq a$ bien entendu, sinon il n'y en a pas). Si on veut un garçons exactement dans le groupe, il faut choisir le garçon, et $n-1$ filles, ce qui donne $\binom{a}{1} \times \binom{b}{n-1}$ possibilités. Plus généralement, le nombre de groupes à k garçons vaut $\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

   (c) Le nombre total de groupes est la somme des nombres de groupes contenant k garçons, pour toutes les valeurs de k possibles, c'est-à-dire pour k compris entre 0 et n. Autrement dit, $\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$, ce qui est exactement la formule de Vandermonde.

2. (a) On sait, d'après la formule du binôme, que $(x+1)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} x^k$. Le coefficient devant x^n est donc égal à $\binom{p+q}{n}$.

   (b) De même que ci-dessus, $P(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k$, et $Q(x) = \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} x^j$ (j'ai changé le nom de l'indice pour que le raisonnement soit plus lisible. Quand on fait le produit, on obtient donc une grosse somme, pour toutes les valeurs possibles de j et de k, de termes de la forme $\binom{p}{k}\binom{q}{j} x^{k+j}$. Ce terme contribue au terme en x^n de $P(x)Q(x)$ si et seulement si $j+k=n$, soit $j=n-k$. Autrement dit, on a un terme de la forme $\binom{p}{k}\binom{q}{n-k} x^n$. Il faut additionner tous ces termes, c'est-à-dire prendre toutes les valeurs de k comprises entre 0 et n, pour obtenir un coefficient devant x^n égal à $\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{n-k}{q}$.

   (c) Puisque $R(x) = P(x)Q(x)$, les coefficients calculés aux deux questions précédentes doivent être les mêmes. Autrement dit, $\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$. Mis à part le fait que le concepteur du sujet a bizarrement transformé les variables a et b en p et q, on retrouve exactement la formule de Vandermonde.

3. L'indication de l'énoncé n'était pas forcément très claire : on va faire une récurrence sur a en appelant P_a la propriété « $\forall b \in \mathbb{N}$, $\forall n \leq a+b$, $\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$ ». Commençons par initialiser pour $a=0$: dans ce cas, la somme du membre de droite de l'égalité ne contient que des termes nuls, sauf pour $n=0$. Cet unique terme restant vaut $\binom{0}{0}\binom{b}{n} = \binom{b}{n}$, ce qui correspond à la valeur attendue. La propriété P_0 est donc vraie. Supposons désormais P_a vraie quelles que soient les valeurs de b et de n, et tentons de prouver P_{a+1}. On veut donc calculer $A = \sum_{k=0}^{n} \binom{a+1}{k}\binom{n-k}{b}$. Utilisons la formule de Pascal sur le coefficient binomial de gauche, pour

obtenir $A=\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}+\binom{a}{k-1}\binom{b}{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{a}{k}\binom{b}{n-1-k}$ (en décalant les indices dans la deuxième somme, le premier terme étant de toute façon nul). On applique alors deux fois notre hypothèse de récurrence (pour deux valeurs de n différentes, mais à chaque fois avec a en haut du premier coefficient binomial, c'est bien ce qu'on a supposé dans l'hypothèse de récurrence) : $A=\binom{a+b}{n}+\binom{a+b}{n-1}=\binom{a+b+1}{n}$ en appliquant de nouveau la relation de Pascal, dans l'autre sens cette fois-ci. On vient de prouver la propriété P_{a+1}, la formule de Vandermonde est donc vérifiée.

4. On prend simplement $a=b=n$ dans la formule de Vandermonde : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{2n}{n}$.

   Il ne reste plus qu'à se rappeler que $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ (symétrie des coefficients binomiaux) pour conclure que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$.

5. (a) Le changement d'indice ne modifie pas les bornes de la somme (on la parcourt juste à l'envers), et $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$, donc on obtient $T_n=\sum_{i=0}^{n}(n-i)\binom{n}{k}^2$. En additionnant les deux expressions de T_n (on peut noter l'indice k dans la formule qu'on bient d'obtenir, ça ne change rien), on trouve $2T_n=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}^2+(n-k)\binom{n}{k}^2=n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=nS_n$. Autrement dit, $T_n=\frac{n}{2}S_n=\frac{n}{2}\binom{2n}{n}=\frac{n\times(2n-1)!}{(n-1)!n!}=n\binom{2n-1}{n-1}$ (on peut trouver quantité d'autres expressions équivalentes pour T_n).

   (b) On commence par utiliser la formule sans nom du cours : $T_n=n\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k}$. En utilisant la symétrie des coefficients binomiaux puis la formule de Vandermonde avec $a=n$ et $b=n-1$, on trouve $T_n=n\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{n-k}\binom{n}{k}=n\binom{2n-1}{n}$ (ce qui est la même chose que la dernière formule obtenue auparavant, encore une fois par symétrie des coefficients binomiaux).