Devoir Surveillé n°5

PTSI B Lycée Eiffel

31 janvier 2015

Exercice 1

On souhaite disposer n hommes et n femmes autour d'une table ronde comportant $2n$ places.

1. On suppose dans un premier temps que tous les sièges sont numérotés (donc distinguables).
   (a) Combien y a-t-il de façons différentes de placer les $2n$ personnes autour de la table ?
   (b) Combien de façons d'avoir les n hommes regroupés autour d'une moitié de table (et les n femmes de l'autre côté) ?
   (c) Combien de façons où on a une alternance stricte homme-femme ?
2. On suppose désormais que les sièges importent peu, seul l'ordre dans lequel les personnes sont assises est important (ainsi, si on décale tout le monde de trois sièges par exemple, on considérera que le positionnement reste le même).
   (a) Combien y a-t-il désormais de façons différentes d'asseoir tout le monde ?
   (b) Combien de placements avec alternance stricte homme-femme ?
3. Faire les applications numériques explicites lorsque $n = 3$ (on fera la liste de tous les cas pour la dernière question).

Exercice 2

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, et $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $(P - I_3)^3 - 2P$. En déduire que P est inversible, et déterminer P^{-1}.
3. Comparer les matrices AP et PT.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$. Cette formule reste-t-elle valable pour $n = -1$?
5. Montrer que, pour tout entier naturel n, T^n est de la forme $T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, et déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (α_n). De quel type de suite s'agit-il ?
6. On pose $J = T - 2I$. Calculer les premières puissances de J (jusqu'à J^3), puis déterminer J^k pour tout entier k.
7. En déduire une expression détaillée de T^n, puis de A^n (on écrira tous les coefficients de la matrice).
8. Une application des résultats précédents : le calcul du commutant de A.
   (a) Montrer qu'une matrice M commute avec A si et seulement si $P^{-1}MP$ commute avec T.
   (b) Déterminer toutes les matrices commutant avec la matrice T.
   (c) En déduire l'ensemble des matrices commutant avec la matrice A.

Exercice 3

On définit, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction g_n par $g_n(x) = nx + \ln(x)$.

1. Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution pour tout entier $n \geq 1$. On note désormais u_n cette solution.
2. Montrer que, $\forall n \geq 3$, $\dfrac{1}{n} \leq u_n \leq 1$.
3. Déterminer le signe de $g_n(u_{n+1})$, et en déduire la monotonie de la suite (u_n).
4. Montrer par un raisonnement par l'absurde que (u_n) ne peut pas converger vers une limite strictement positive. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
5. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{\ln(u_n)}{\ln(n)}$.
6. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.
   (a) Montrer que, $\forall t > 0$, $\dfrac{1}{t} \geq \ln(t+1) - \ln(t)$.
   (b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, puis de $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 4

On cherche dans cet exercice à démontrer de plusieurs façons différentes la formule de Vandermonde : $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$, qui est valable pour tous entiers naturels a et b, et pour les entiers naturels n vérifiant $n \leq a+b$. Les trois premières questions sont évidemment indépendantes, la formule peut être utilisée pour les questions suivantes même si vous n'avez pas traité les premières questions.

1. Méthode combinatoire : on considère une classe constituée de a garçons et b filles (et donc $a+b$ élèves au total). On souhaite constituer un groupe de n élèves dans cette classe.
   (a) De combien de façons peut-on constituer le groupe ?
   (b) Parmi les groupes possibles, combien y en a-t-il uniquement constitués de garçons ? Combien ne contenant qu'un seul garçon ? Plus généralement, pour un entier k inférieur ou égal à n, combien de groupes contiennent exactement k garçons ?
   (c) En déduire la formule de Vandermonde.
2. Méthode calculatoire : on pose $P(x) = (1+x)^p$, $Q(x) = (1+x)^q$ et $R(x) = (1+x)^{p+q}$.
   (a) Déterminer le coefficient de x^n dans le développement de $R(x)$.
   (b) Déterminer le coefficient de x^n dans le développement de $P(x) \times Q(x)$ (en développant chaque polynôme séparément par la formule du binome de Newton, puis en faisant le produit).
   (c) En déduire la formule de Vandermonde.
3. Méthode brutale : démontrer la formule de Vandermonde par récurrence sur a (on fixe donc les valeurs de a et de n).
4. Calculer $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ à l'aide de la formule de Vandermonde.
5. On pose désormais $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2$.
   (a) En effectuant le changement d'indice $i = n-k$, exprimer T_n en fonction de S_n et en déduire la veleur de T_n.
   (b) Retrouver ce résultat en calculant directement la somme définissant T_n (on pourra utiliser une formule du cours, puis la formule de Vandermonde).