Devoir Surveillé n°4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

10 janvier 2015

Exercice 1

1. On calcule donc $M^2 = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ puis $M^3 = \begin{pmatrix} 15 & -14 & -7 \\ 7 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.
2. Si une telle relation existe, les coefficients hors de la diagonale donnent immédiatement $a = 3$. Ensuite, sur la diagonale, on constate que $b = -2$ convient, c'est-à-dire que $M^2 = 3M - 2I_3$.
3. On procède bien entendu par récurrence. La relation est vraie pour $n = 2$ (c'est la question précédente), mais aussi pour $n = 1$ en posant $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$, et même pour $n = 0$ en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ puisque $M^0 = I_3$. Supposons désormais que $M^n = a_nM + b_nI$, alors on peut écrire $M^{n+1} = M^n \times M = (a_nM + b_nI) \times M = a_nM^2 + b_nM$. Mais comme $M^2 = 3M - 2I$, on peut remplacer : $M^{n+1} = a_n(3M - 2I) + b_nM = (3a_n + b_n)M - 2a_nI$. La propriété reste donc vraie au rang $n + 1$, en posant $a_{n+1} = 3a_n + b_n$, et $b_{n+1} = -2a_n$. Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n.
4. Il suffit de calculer $c_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = 3a_n + b_n - 2a_n = a_n + b_n = c_n$. La suite est donc bien constante, égale à 1 puisque $c_0 = 0 + 1 = 1$.
5. Il suffit d'écrire $b_{n+2} = -2a_{n+1} = -6a_n - 2b_n$. Comme $b_{n+1} = -2a_n$, $-6a_n = 3b_{n+1}$, et $b_{n+2} = 3b_{n+1} - 2b_n$.
6. La suite (b_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 3x + 2 = 0$. Cette équation a pour racines évidentes $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$ (mais bien sûr, rien n'empêche de calculer un discriminant), donc $b_n = \alpha + \beta 2^n$. À l'aide des valeurs initiales, $b_0 = \alpha + \beta = 1$, et $b_1 = \alpha + 2\beta = 0$, donc, en soustrayant les deux équations, $\beta = -1$, et $\alpha = 1 - \beta = 2$. On en déduit que $b_n = 2 - 2^n$, puis $a_n = -\dfrac{1}{2}b_{n+1} = 2^n - 1$ (on peut aussi utiliser que $a_n + b_n = 1$, donc $a_n = 1 - b_n$). Enfin, $M^n = (2^n - 1)M + (2 - 2^n)I_3 = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2 - 2^{n+1} & 1 - 2^n \\ 2^n - 1 & 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
   On vérifie sans problème que ça marche pour $n = 2$ et $n = 3$.
7. Puisque $2^{-1} = \dfrac{1}{2}$, on trouve $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On calcule alors $AB = I_3$, ce qui prouve que B est bien l'inverse de la matrice A, soit $B = A^{-1}$.

Exercice 2

1. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 16 - 4(4 + 2i) = -8i$. Puisque $\Delta = 8e^{-i\frac{\pi}{2}}$, pas besoin de calcul compliqué pour choisir $\delta = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2-2i$.
   On en déduit $z_1 = \dfrac{4 + 2 - 2i}{2} = 3 - i$, et $z_2 = \dfrac{4 - 2 + 2i}{2} = 1 + i$.

2. Calculons donc $f(z_1) = z_1^2 - 4z_1 = (3-i)^2 - 4(3-i) = 9 - 6i - 1 - 12 + 4i = -4 - 2i$, et $f(z_2) = z_2^2 - 4z_2 = (1+i)^2 - 4(1+i) = 1 + 2i - 1 - 4 - 4i = -4 - 2i$. En fait, ce n'est pas surprenant du tout puisque les deux nombres z_1 et z_2 vérifient par définition $z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$, soit $f(z) = -4 - 2i$. Ce résultat prouve évidemment que f ne peut pas être injective. Par contre, l'équation $f(z) = a$ aura toujours une solution quelle que soit la valeur de a, donc f est surjective (on peut citer le théorème de d'Alembert-Gauss pour faire son kéké).

3. La numérotation des question dans le sujet était foireuse, mais peu importe. Les antécédents de -5 sont obtenus en résolvant l'équation $z^2 - 4z + 5 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 16 - 20 = -4$, donc admet pour solutions $z_1 = \dfrac{4+2i}{2} = 2 + i$, et $z_2 = 2 - i$. Un peu plus de calculs pour déterminer les antécédents de $1 - 12i$ puisqu'il faut résoudre l'équation $z^2 - 4z - 1 + 12i = 0$. Elle a pour discriminant $\Delta = 16 - 4(-1 + 12i) = 20 - 48i = 4(5 - 12i)$. On va chercher un nombre complexe $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On obtient directement les deux équations $a^2 - b^2 = 20$ et $2ab = -48$, puis, en exploitant le module, $a^2 + b^2 = |\Delta| = 4\sqrt{5^2 + 12^2}4\sqrt{25 + 144} = 4 \times 13 = 52$. En additionnant les deux équations extrêmes, $2a^2 = 72$, soit $a = \pm 6$. En les soustrayant, $2b^2 = 32$, soit $b = \pm 4$. Comme a et b doivent être de signe contraire d'après la deuxième équation, on peut prendre $\delta = 6 - 4i$. On trouve alors comme solutions de notre équation les deux nombres $z_3 = \dfrac{4 + 6 - 4i}{2} = 5 - 2i$, et $z_4 = \dfrac{4 - 6 + 4i}{2} = -1 + 2i$.

   (a) Un calcul extrêmement difficile donne $f(z) = a^2 - b^2 + 2iab - 4(a + ib) = a^2 - b^2 - 4a + i(2ab - 4b)$.

   (b) On cherche donc les nombres pour lesquels $2ab - 4b = 0$, soit $2b(a-2) = 0$. Il s'agit de la réunion de deux droites : celle d'équation $y = 0$ (autrement dit l'axe réel) et celle d'équation $x = 2$, parallèle à l'axe imaginaire. Réciproquement, les images de tous les nombres réels par f sont des nombres réels, mais tous les réels n'admettent pas d'antécédents réels. La fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x$ définie sur $\mathbb{R}$ admet pour dérivée $f'(x) = 2x - 4$, et a un maximum en $x = 2$ de valeur $f(2) = -4$. Comme par ailleurs $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$, on en déduit que $f(\mathbb{R}) = [-4, +\infty[$.

   (c) On obtient cette fois-ci la condition $a^2 - b^2 - 4a = -4$, soit $a^2 - 4a + 4 = b^2$. On reconnait une identité remarquable, donc $b = \pm a - 2$. Là encore, on a un ensemble constitué de deux droites, d'équations $y = x - 2$ et $y = 2 - x$.

   (d) Les points pour lesquels $f(z)$ appartient au cercle de centre I et de rayon 1 sont ceux pour lesquels $|f(z) + 4| = 1$, soit $|z^2 - 4z + 4| = 1$, donc $|(z-2)|^2 = 1$. Le module étant toujours positif, on en déduit que $|z - 2| = 1$, ce qui signifie que z appartient au cercle de centre I et de rayon 1 (et il s'agit d'une équivalence).

   (e) C'est le même calcul que précédemment : $f(z) + 4 = (z-2)^2$, donc si $z - 2 = re^{i\theta}$, on aura $f(z) + 4 = r^2 e^{2i\theta}$. En particulier, si z appartient à un cercle de centre I et de rayon r, on aura $z = 2 + re^{i\theta}$, donc $f(z) = -4 + r^2 e^{2i\theta}$ appartiendra au cercle de centre J et de rayon r^2. Encore une fois, il s'agit d'une équivalence.

   (f) D'après la question précédente, on aura manifestement $f(z_E) = -4 + 4e^{2i\frac{\pi}{3}}$. Sinon, on peut aussi faire un calcul direct : $z_E = 2 + 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3 + i\sqrt{3}$, donc $f(z_E) = (3 + i\sqrt{3})^2 - 4(3 + i\sqrt{3}) = 9 + 6i\sqrt{3} - 3 - 12 - 4i\sqrt{3} = -6 + 2i\sqrt{3} = -4 + (-2 + 2i\sqrt{3}) = -4 + 4e^{2i\frac{\pi}{3}}$. La dernière chose demandée par l'énoncé est étrange car il semble manquer le module r dans l'expression, mais avec un peu de mauvaise foi, on peut quand même s'en sortir puisqu'il n'est pas précisé que θ doit être un nombre réel : $4e^{2i\frac{\pi}{3}} = e^{i(-2i\ln(2))}e^{2i\frac{\pi}{3}} = e^{i(2\frac{\pi}{3} - 2\ln(2))}$. Bien sûr, cette écriture n'a rigoureusement aucun intérêt.

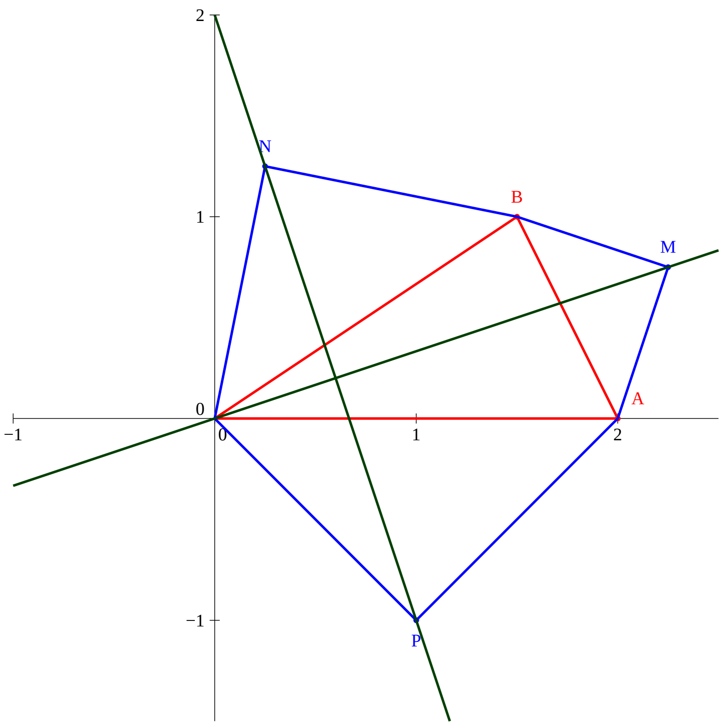
4. Question sans intérêt également. Il faut résoudre l'équation du second degré $z^2 - 2z - 1 - 4i = 0$, de discriminant $\Delta = 4 + 4(1 + 4i) = 8 + 16i = 8(1 + 2i)$. On cherche $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On obtient par la méthode habituelle les équations $a^2 - b^2 = 8$, $2ab = 16$, puis

$a^2+b^2=|\Delta|=8\sqrt{1+4}=8\sqrt{5}$. On trouve donc, en additionnant et soustrayant les équations, $a=\pm\dfrac{\sqrt{8+8\sqrt{5}}}{2}=2\sqrt{1+\sqrt{5}}$, et $b=\pm\dfrac{8\sqrt{5}-8}{2}=2\sqrt{\sqrt{5}-1}$. On choisit δ de façon à avoir a et b de même signe, puis on obtient les solutions $z_1=1+\sqrt{1+\sqrt{5}}+i\sqrt{\sqrt{5}-1}$, et $z_1=1-\sqrt{1+\sqrt{5}}-i\sqrt{\sqrt{5}-1}$. On peut soupçonner vu la tête assez moche des solutions que les ouzbeks se sont plantés dans les coefficients de l'équation, mais ça pourrait être pire.

Exercice 3

On note O l'origine du plan complexe et A et B les deux points de ce plan d'affixes respectives $z_A=2$ et $z_B=\dfrac{3}{2}+i$. On considère les trois points M, N et P tels que AMB, BNO et OPA soient trois triangles isocèles rectangles (en M, N et P respectivement) directs (autrement dit, ces triangles sont entièrement extérieurs au triangle OAB).

1. Hop, une figure :



2. Puisque le triangle AMB est isocèle rectangle direct en M, on a d'une part $MA=MB$, et d'autre part $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})=\dfrac{\pi}{2}$. On peut regrouper ces deux conditions, en termes d'affixes complexes, sous la forme $z_{\overrightarrow{MA}}=iz_{\overrightarrow{MB}}$, soit $z_A-z_M=iz_B-iz_M$, ou encore $z_M=\dfrac{iz_B-z_A}{i-1}=\dfrac{\frac{3}{2}i-1-2}{i-1}=\dfrac{(\frac{3}{2}i-3)(-1-i)}{2}=\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}i$. Par un calcul complètement similaire, on obtient $z_N=\dfrac{iz_O-z_B}{i-1}=\dfrac{(-\frac{3}{2}-i)(-1-i)}{2}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{4}i$. Enfin, $z_P=\dfrac{iz_A-z_O}{i-1}=\dfrac{2i(-1-i)}{2}=1-i$. On vérifie sans problème que ces affixes sont cohérentes avec les coordonnées lues sur la figure.

3. Il suffit de calculer $\dfrac{z_N-z_P}{z_M-z_O}=\dfrac{-\frac{3}{4}+\frac{9}{4}i}{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}i}=i$ pour constater que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont orthogonaux, et donc que les droites (OM) et (NP) sont perpendiculaires. Accessoirement, on a aussi prouvé que $OM=NP$ puisque le quotient est de module 1.

4. (a) Pas besoin de résoudre de système : $\dfrac{AB}{AM}=\sqrt{2}$ (la longueur AB est celle de la diagonale d'un carré de côtés AM et MB), donc s_1 a pour rapport $\sqrt{2}$. Et comme $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}=\dfrac{\pi}{4}$ (puisqu'on est dans un triangle isocèle réctangle), son angle est de $\dfrac{\pi}{4}$. On a donc, pour tout nombre complexe z, $s_1(z)-z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-z_A)$, soit $s_1(z)=2+(1+i)(z-2)=(1+i)z-2i$. De même, la similitude similitude s_2 a pour rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et pour angle $\dfrac{\pi}{4}$, donc $s_2(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}z=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)z$.

   (b) On calcule donc $r(z)=s_2(s_1(z))=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)(1+i)z-i+1=iz+1-i$. La similitude r a pour rapport 1 (le module de i) et pour angle $\dfrac{\pi}{2}$, il s'agit d'une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Son centre a une affixe vérifiant $r(z)=z$, soit $z-iz=1-i$, donc $z=1$. Le centre de la rotation r est donc le point D d'affixe 1, qui est le milieu du segment $[OA]$.

   (c) Autant calculer $r(z_M)=iz_M+1-i=\dfrac{9}{4}i-\dfrac{3}{4}+1-i=\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{4}i=z_N$, et $r(z_O)=1-i=z_P$. On en déduit que $r(M)=N$ et $r(O)=P$.

   (d) Puisque r est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, elle transforme une droite en une droite perpendiculaire. D'après la question précédente, l'image de la droite (OM) par r est la droite (NP), ce qui suffit à conclure.

Problème

1. Si (u_n) est constante égale à a, on aura $p_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}a=a^n$, ce qui signifie que (p_n) est une suite géométrique de raison a.
2. Il aurait fallu enlever d'abord le cas particulier où un des termes de la suite (u_n) est égal à 0, puisque dans ce cas la suite (p_n) est nulle à partir d'un certain rang, et converge donc vers 0, quelle que soit la nature de (u_n). Si on suppose donc que u_n n'est jamais nul, et du coup que p_n non plus, on peut constater que $u_n=\dfrac{p_n}{p_{n-1}}$. Or, si (p_n) a une certaine limite l, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}p_{n-1}=l$, et le quotient tend donc vers 1. Hum, à un petit détail près quand même, c'est que si $l=0$, on ne peut rien conclure. Il aurait en fait fallu que l'énoncé précise que (p_n) doit converger vers une limite non nulle.
3. (a) Dans ce cas, on calcule $p_n=\prod k=1^n\left(1+\dfrac{1}{k}\right)=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\dfrac{k+1}{k}=\dfrac{(n+1)!}{n!}=n+1$. Manifestement, $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=+\infty$, la suite (p_n) diverge donc.

   (b) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$, la réciproque de la question 2 est fausse (même si on élimine le cas de la limite nulle).
4. (a) On calcule classiquement $q_{n+1}=p_{n+1}\sin\left(\dfrac{a}{2^{n+1}}\right)$. Or, par construction de la suite (p_n), on a $p_{n+1}=p_n\times\cos\left(\dfrac{a}{2^{n+1}}\right)$, et on sait bien depuis qu'on a fait un chapitre inoubliable sur la trigonométrie que $\cos\left(\dfrac{a}{2^{n+1}}\right)\times\sin\left(\dfrac{a}{2^{n+1}}\right)=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2a}{2^{n+1}}\right)=\sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$. On peut donc écrire $p_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n\times\sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right)=\dfrac{1}{2}q_n$. La suite (q_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, et de premier terme $q_1=p_1\times\sin\left(\dfrac{a}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{a}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\sin(a)$. On en déduit que $q_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}\times\dfrac{1}{2}\sin(a)=\dfrac{\sin(a)}{2^n}$.

(b) La question précédente prouve que $p_n = \dfrac{\sin(a)}{2^n \sin(\frac{a}{2^n})}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a}{2^n} = 0$, et on sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ (taux d'accroissement tendant vers la dérivée de sin en 0, qui vaut 1). On peut en conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n \sin(\frac{a}{2^n})}{a} = 1$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n \sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right) = a$. Il ne reste plus qu'à intégrer ceci dans le dénominateur de p_n pour obtenir que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{\sin(a)}{a}$.

5. (a) Il suffit d'appliquer la définition de la limite avec par exemple $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$: il existe un entier n_0 à partir duquel $|u_n - 1| < \dfrac{1}{2}$, soit $\dfrac{1}{2} < u_n < \dfrac{3}{2}$, ce qui implique évidemment $u_n > 0$.

(b) En notant k le nombre réel $k = \prod\limits_{k=1}^{n_0-1} u_k$, on peut écrire, lorsque $n \geq n_0$, $p_n = k \times \prod\limits_{n=0}^{n} u_k = k \times e^{S_n}$ (puisque les propriétés élémentaires sur le logarithme permettent d'écrire $S_n = \ln\left(\prod\limits_{n_0}^{n} u_k\right)$). On va encore une fois se placer dans le cas où la suite (u_n) ne s'annule jamais, ce qui implique $k \neq 0$. La convergence de (p_n) est alors équivalente à celle de (e^{S_n}), et donc à celle de (S_n) elle-même.

(c) Dans ce cas particulier, on a $u_n > 0$ dès le rang 1, et on pose donc $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(\sqrt[k]{k}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{k}$. La suite (S_n) est clairement croissante (puisqu'on ajoute à chaque fois un nouveau terme positif à la somme), il suffit donc de savoir si elle est majorée pour prouver sa convergence (et celle de (p_n) par la même occasion en utilisant la question précédente). Utilisons pour cela l'indication donnée par l'énoncé : posons $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ et étudions rapidement les variations de la fonction g. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$. La fonction g est donc décroissante sur $[e, +\infty[$, et en particulier sera décroissante sur $[n, n+1]$ dès que $n \geq 3$. On en déduit que, sous cette condition, $\forall x \in [n, n+1]$, $\dfrac{\ln(n)}{n} \geq \dfrac{\ln(x)}{x}$. Il ne reste plus qu'à intégrer cette inégalité entre n et $n+1$ pour en déduire que $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x}\, dx \leq \frac{\ln(n)}{n}$. En sommant toutes ces inégalités pour les valeurs de k comprises entre 3 et n, on trouve alors $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x}\, dx \leq \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leq S_n$. Or, le membre de gauche de notre inégalité, via la relation de Chasles, est égal à $\displaystyle\int_3^{n+1} \frac{\ln(x)}{x}\, dx = \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_3^{n+1} = \frac{1}{2}(\ln^2(n+1) - \ln^2(3))$. Cette expression a manifestement pour limite $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui prouve que (S_n) ne peut pas converger. Le produit (p_n) est donc lui-même divergent.

6. (a) Notons h la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $h(x) = x - \ln(1+x)$. Elle est dérivable, de dérivée $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$. La fonction est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$, et tend vers 0 en 0 (calcul immédiat), ce qui prouve qu'elle ne prend que des valeurs strictement positives.

(b) Puisque $T_{n+1} - T_n = v_{n+1} > 0$, la suite est bien croissante. Si (T_n) converge, cela signifie qu'elle est majorée par un certain réel M. Mais alors, quel que soit l'entier n, $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1+$

$v_k) \leq \sum_{k=1}^{n} v_k \leq M$. Autrement dit, $\ln(p_n) \leq M$, et la suite $(\ln(p_n))$ est elle-même majorée. Or, la suite (p_n) est croissante puisque $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = 1 + v_{n+1} > 1$, donc $(\ln(p_n))$ est elle-même croissante. Par théorème de convergence monotone, $(\ln(p_n))$ est une suite convergente, et (p_n) également.

(c) Dans la question 3, on avait $p_n = 1 + v_n$, avec $v_n = \dfrac{1}{n}$, ce qui est certainement positif et tend vers 0. La contraposée de la question précédente indique que la divergence de (p_n) (prouvée à la question 3) implique celle de (T_n), qui est justement égale à $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = +\infty$ (si cette suite croissante ne converge pas, elle tend nécessairement vers $+\infty$).

7. (a) Dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + a^{2^n} = +\infty$ (avec un tout petit cas particulier où la limite vaut 2 si $a = 1$). La question 2 prouve alors que (p_n) ne peut pas converger.

(b) On va essayer d'utiliser le résultat de la question 6.b : dans notre cas, $T_n = \sum_{k=1}^{n} a^{2^k}$. Ce n'est pas une somme géométrique puisqu'il manque un paquet de termes, mais c'est certainement plus petit qu'une somme géométrique : $T_n \leq \sum_{k=0}^{2^n} a^k = \dfrac{1 - a^{2^k+1}}{1-a} \leq \dfrac{1}{1-a}$. La suite (T_n) est donc majorée, elle est toujours croissante, elle converge nécessairement, et le produit (p_n) aussi.

(c) On peut écrire le calcul suivant : $(1-a^2)p_n = (1-a^2)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)\dots(1+a^{2^n}) = (1-a^4)(1+a^4)(1+a^8)\dots(1+a^{2^n}) = \dots = 1 - a^{2^{n+1}}$. On effectue successivement n utilisations de l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Comme $a < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{2^{n+1}} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-a^2)p_n = 1$. Autrement dit, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{1-a^2}$.