Devoir Surveillé n°4

PTSI B Lycée Eiffel

10 janvier 2015

Problème

À toute suite de réels (u_n), on associe la suite (p_n) définie par $\forall n \geq 1$, $p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k = u_1 \times \cdots \times u_n$.

1. Dans le cas où (u_n) est une suite constante, à quoi ressemble la suite (p_n) ?
2. Montrer que, si (p_n) est une suite convergente, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.
3. On pose dans cette question $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.
   (a) Calculer explicitement p_n dans ce cas, et déterminer la nature de la suite (p_n).
   (b) La réciproque de la propriété démontrée à la question 2 est-elle vraie ?
4. On pose dans cette question $u_n = \cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$, où a est un réel fixé. On pose également, si $a \not\equiv 0[\pi]$, $q_n = p_n \times \sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$.
   (a) Montrer que la suite (q_n) est une suite géométrique.
   (b) En déduire que (p_n) est convergente et déterminer sa limite.
5. On suppose désormais que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.
   (a) Montrer rigoureusement que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.
   (b) En notant n_0 ce rang, et $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} \ln(u_k)$, montrer que la suite (p_n) converge si et seulement si la suite (S_n) converge.
   (c) Appliquer le résultat précédent à la suite $u_n = \sqrt[n]{n}$ (on pourra démontrer en cours de route que $\int_n^{n+1} \dfrac{\ln(x)}{x}\, dx \leq \dfrac{\ln(n)}{n}$ si $n \geq 3$).
6. On note désormais $p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + v_k)$, où (v_k) est une suite de réels strictement positifs tendant vers 0. On note $T_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.
   (a) Démontrer que, $\forall x > 0$, $\ln(1 + x) < x$.
   (b) Montrer que (T_n) est une suite croissante, et que, si (T_n) converge, alors (p_n) converge également.
   (c) Déduire de la question 3 la limite de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right)$.
7. On pose enfin $p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a^{2^k})$, où a est un réel strictement positif fixé.
   (a) Quelle est la nature de (p_n) si $a \geq 1$?
   (b) Montrer que, si $0 < a < 1$, le produit (p_n) converge.
   (c) Calculer $(1 - a^2)p_n$, et en déduire la limite de la suite (p_n).

Exercice 1

On cherche à calculer les puissances de la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2 et M^3.
2. Déterminer deux réels a et b tels que $M^2 = aM + bI_3$.
3. Montrer que, pour tout entier n, on peut écrire $M^n = a_n M + b_n I_3$, et déterminer des relations entre a_{n+1}, b_{n+1}, a_n et b_n.
4. Montrer que la suite (c_n) définie par $c_n = a_n + b_n$ est constante.
5. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+2} = 3b_{n+1} - 2b_n$.
6. Déterminer une expression explicite de b_n, puis de a_n, et enfin de M^n.
7. Écrire la matrice B obtenue en remplaçant n par -1 dans les formules précédentes, puis calculer le produit AB. Commenter le résultat obtenu.

Exercice 2

On considère dans cet exercice l'application f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = z^2 - 4z$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$. On notera z_1 et z_2 les racines de l'équation.
2. Déterminer les images par f de z_1 et z_2. L'application f est-elle injective ? Surjective ?
3. Déterminer les antécédents par f de -5, puis de $1 - 12i$.
   (a) En posant $z = a + ib$, exprimer $f(z)$ sous forme algébrique.
   (b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{R}$. Réciproquement, déterminer précisément l'image de $\mathbb{R}$ par l'application f.
   (c) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $\mathrm{Re}(f(z)) = -4$.
   (d) On note I et J les points du plan complexe d'affixes 2 et -4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z)$ appartient au cercle de centre J et de rayon 1.
   (e) Déterminer la forme exponentielle de $f(z) + 4$ en fonction de celle de $z - 2$. En déduire l'image par f de tous les cercles de centre I.
   (f) En notant E le point d'affixe $z_E = 2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, calculer $f(z_E)$, puis l'Ã©crire sous la forme $e^{i\theta} - 4$.
4. Résoudre l'équation $f(z) = 1 + 4i - 2z$.

Exercice 3

On note O l'origine du plan complexe et A et B les deux points de ce plan d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = \frac{3}{2} + i$. On considère les trois points M, N et P tels que AMB, BNO et OPA soient trois triangles isocèles rectangles (en M, N et P respectivement) directs (autrement dit, ces triangles sont entièrement extérieurs au triangle OAB).

1. Faire une figure.
2. Calculer les affixes complexes des points M, N et P.
3. Démontrer que (OM) et (NP) sont des droites perpendiculaires.
4. On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B, et s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N. On note également $r = s_2 \circ s_1$.
   (a) Déterminer l'expression complexe, l'angle et le rapport des similitudes s_1 et s_2.
   (b) En déduire l'expression complexe de la similitude r, puis reconnaitre cette dernière.
   (c) Déterminer les images des points M et O par r.
   (d) Redémontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.