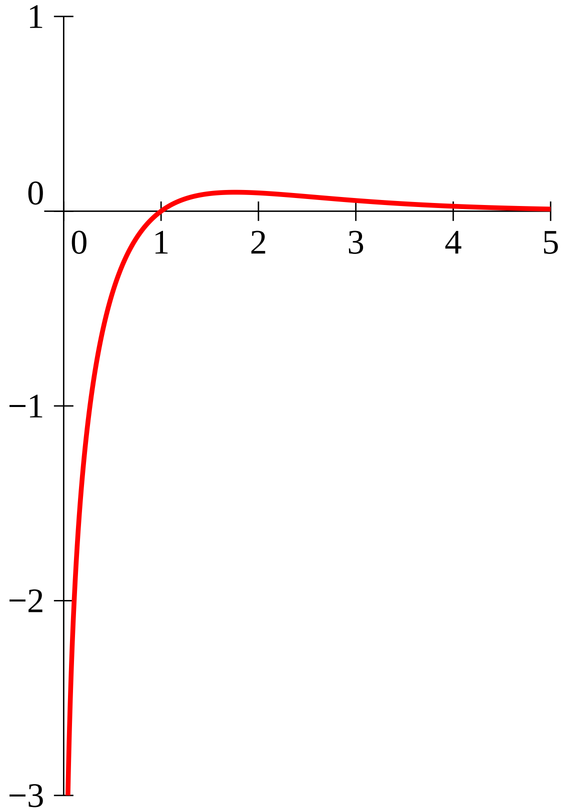
Devoir Surveillé n°3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

29 novembre 2014

Exercice 1

1. Calculons donc $f'(x) = -e^{-x}\ln(x) + \dfrac{e^{-x}}{x}$, puis $f''(x) = e^{-x}\ln(x) - 2\dfrac{e^{-x}}{x} - \dfrac{e^{-x}}{x^2}$. on en déduit que $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = e^{-x}\left(\ln(x) - \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} - 3\ln(x) + \dfrac{3}{x} + 2\ln(x)\right) = \dfrac{x-1}{x^2}e^{-x}$. La fonction f est bien solution de l'équation.
2. Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation homogène associée. Son équation caractéristique $x^2 + 3x + 2 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$ et admet pour racines $x_1 = \dfrac{-3-1}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-3+1}{2} = -1$. Les solutions homogènes sont donc de la forme $y_h(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x}$, et les solutions de l'équation complète sont les fonctions $y : x \mapsto Ae^{-x} + Be^{-2x} + e^{-x}\ln(x)$.
3. Avec la formule précédente, la condition $f(1) = 0$ implique $\dfrac{A}{e} + \dfrac{B}{e^2} = 0$, et $y'(x) = -Ae^{-x} - 2Be^{-2x} - e^{-x}\ln(x) + \dfrac{e^{-x}}{x}$, donc $y'(1) = -\dfrac{A}{e} - 2\dfrac{B}{e^2} + \dfrac{1}{e}$. La condition $f'(1) = \dfrac{1}{e}$ implique donc $-\dfrac{A}{e} - 2\dfrac{B}{e^2} = 0$. La solution triviale du système est $A = B = 0$, la fonction recherchée est donc la fonction f de la première question.
4. On a déjà calculé la dérivée de f plus haut, qui est du signe de $\dfrac{1}{x} - \ln(x) = \dfrac{1 - x\ln(x)}{x}$. Le numérateur a lui-même pour dérivée $-1-\ln(x)$, qui s'annule en $\dfrac{1}{e}$. Ce numérateur est croissant puis décroissant, il tend vers 1 en 0 (par croissance comparée), et vers $-\infty$ en $+\infty$. La fonction f' s'annule donc une seule fois sur $]0, +\infty[$, en une valeur $\beta > \dfrac{1}{e}$ (n fait on sait déjà que $\beta > 1$ puisque $f'(1) = \dfrac{1}{e}$; et on peut constater que $\beta < e$ puisque $1 - e\ln(e) < 0$), et f' est positive sur $]0, \beta]$ et négative sur $[\beta, +\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (croissance comparée). On peut donc tracer l'allure suivante :



Exercice 2

1. Non, il n'y a aucune raison que ça change !
2. Les deux fonctions sont périodiques de période $2i\pi$. En effet, $e^{z+2i\pi} = e^z \times e^{2i\pi} = e^z$, et $e^{-z-2i\pi} = e^{-z}$. Par ailleurs, $\text{ch}(z+i\pi) = \dfrac{e^z e^{i\pi} + e^{-z}e^{-i\pi}}{2} = \dfrac{-e^z - e^{-z}}{2} = -\text{ch}(z)$; et $\text{sh}(z + i\pi) = \dfrac{e^z e^{i\pi} - e^{-z}e^{i\pi}}{2} = \dfrac{-e^z + z^{-z}}{2} = -\text{sh}(z)$.
3. (a) On sait que, quel que soit le réel b, le conjugué de e^{ib} est e^{-ib}. On en déduit, en notant $z = a + ib$, que $e^{\bar{z}} = e^{a-ib} = e^a e^{-ib} = e^a \overline{e^{ib}} = \overline{e^z}$ (le réel e^a étant son propre conjugué). Les deux formules demandées en découlent immédiatement.

   (b) C'est le même calcul que pour les fonction réelles correspondantes : $\text{ch}^2(z) - \text{sh}^2(z) = \dfrac{e^{2z} + 2 + e^{-2z}}{4} - \dfrac{e^{2z} - 2 + z^{-2z}}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$.

   (c) Commençons par écrire $\text{ch}(z)$ sous forme algébrique :
   $\text{ch}(z) = \dfrac{e^x e^{iy} + e^{-x}e^{-iy}}{2} = \dfrac{e^x \cos(y) + ie^x \sin(y) + e^{-x}\cos(y) - ie^{-x}\sin(y)}{2}$.
   Ensuite, $4|\text{ch}(z)|^2 = ((e^x + e^{-x})\cos(y))^2 + ((e^x - e^{-x})\sin(y))^2 = e^{2x}\cos^2(y) + 2\cos^2(y) + e^{-2x}\cos^2(y) + e^{2x}\sin^2(y) - 2\sin^2(y) + e^{-2x}\sin^2(y) = e^{2x} + e^{-2x} + 2(\cos^2(y) - \sin^2(y)) = 2\,\text{ch}(2x) + 2\cos(2y)$, soit $|\text{ch}(z)|^2 = \dfrac{\text{ch}(2x) + \cos(2y)}{2}$. On calcule de même $4|\text{sh}(z)|^2 = ((e^x - e^{-x})\cos(y))^2 + ((e^x + e^{-x})\sin(y))^2 = e^{2x} + e^{-2x} - 2\cos^2(y) + 2\sin^2(y) = 2\,\text{ch}(2x) - 2\cos(2y)$, donc $|\text{sh}(z)|^2 = \dfrac{\text{ch}(2x) - \cos(2y)}{2}$.

   (d) En brutalisant salement : $\text{ch}(z)\,\text{ch}(z') + \text{sh}(z)\,\text{sh}(z')$
   $= \dfrac{(e^z + e^{-z})(e^{z'} + e^{-z'}) + (e^z - e^{-z})(e^{z'} - e^{-z'})}{4}$

$= \dfrac{e^{z+e'} + e^{z-z'} + e^{z'-z} + e^{-z-z'} + e^{z+z'} - e^{z-z'} - e^{z'-z} + e^{-z-z'}}{4}$

$= \dfrac{e^{z+z'} + e^{-z-z'}}{2} = \operatorname{ch}(z+z')$. C'est quasiment la même chose pour l'autre calcul : $\operatorname{ch}(z)\operatorname{sh}(z') + \operatorname{sh}(z)\operatorname{ch}(z')$

$= \dfrac{(e^z + e^{-z})(e^{z'} - e^{-z'}) + (e^z - e^{-z})(e^{z'} + e^{-z'})}{4}$

$= \dfrac{e^{z+z'} - e^{z-z'} + e^{z'-z} - e^{-z-z'} + e^{z+z'} + e^{z-z'} - e^{z'-z} - e^{-z-z'}}{4}$

$= \dfrac{e^{z+z'} - e^{-z-z'}}{2} = \operatorname{sh}(z+z')$.

4. (a) On sait que $\operatorname{ch}(z) = 0$ revient à dire que $e^z = -e^{-z}$. N'allez pas prétendre que c'est impossible car les exponentielles sont positives, on est dans $\mathbb{C}$. Notons donc $z = x + iy$, on doit donc avoir $e^x e^{iy} = -e^{-x}e^{-iy} = e^{-x}e^{-iy+i\pi}$. Les deux membres étant désormais mis sous forme exponentielle, leur égalité se résume à l'égalité des modules $e^x = e^{-x}$ et à celle des arguments $y \equiv \pi - y[2\pi]$. On en déduit $x = 0$ et $y \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, soit $z = i\frac{\pi}{2} + ik\pi$, pour un certain $k \in \mathbb{Z}$ (toutes les valeurs de k donnent bien des z différents ici !).

   L'équation $\operatorname{sh}(z) = 0$ se traite de la même façon : $e^x e^{iy} = e^{-x}e^{-iy}$, donc $e^x = e^{-x}$ (qui donne $x = 0$), et $y \equiv -y[2\pi]$ qui implique $y \equiv 0[\pi]$. Finalement, $z = ik\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

   (b) On cherche à résoudre l'équation $e^z + e^{-z} = 2$. Commençons par poser $Z = e^z$, on doit avoir $Z + \frac{1}{Z} = 2$, soit $Z^2 - 2Z + 1 = 0$. On reconnait une identité remarquable qui permet d'en déduire que $Z = 1$. Autrement dit, on s'est ramenés à résoudre l'équation $e^z = e^x e^{iy} = 1$. Comme dans la question précédente, on utilise l'égalité des modules et des arguments pour obtenir $e^x = 1$, soit $x = 0$; et $y \equiv 0[2\pi]$. On trouve donc $2ik\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. De même, l'équation $\operatorname{ch}(z) = i$ peut s'écrire $Z^2 - 2iZ + 1 = 0$. On peut factoriser cette équation sous la forme $(Z - i)^2 + 2 = 0$, soit $(Z - i)^2 = -2 = (i\sqrt{2})^2$. On en déduit les deux solutions possibles $Z_1 = i - i\sqrt{2}$ et $Z_2 = i + i\sqrt{2}$. Commençons par traiter le cas où $e^z = Z_2$, soit $e^x e^{iy} = i + i\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{2}}$. On doit donc avoir $x = \ln(1 + \sqrt{2})$, et $y \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, soit $z = \ln(1 + \sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$. On obtient de même pour la condition $e^z = Z_1$ les solutions $z = \ln(\sqrt{2} - 1) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ (attention ici au fait que $1 - \sqrt{2} < 0$, il faut rajouter un π dans l'argument pour changer le signe).

   (c) On peut tenter la même approche qu'à la question précédente : l'équation $Z^2 - 2aZ + 1 = 0$, avec a un réel quelconque, aura pour discriminant $\Delta = 4a^2 - 4 = 4(a^2 - 1)$. Si $a \geq 1$, on trouve donc deux possibilités réelles pour Z, et réciproquement, si e^z est réel, il est clair que $\operatorname{ch}(z)$ le sera aussi. Par contre, si $a \in]-1, 1[$, $\Delta < 0$, et les solutions de l'équation sont de la forme $Z = \dfrac{2a \pm i\sqrt{1 - a^2}}{2} = a \pm i\sqrt{1 - a^2}$. La condition $e^z \in \mathbb{R}$ est vérifiée si $y \equiv 0[\pi]$ (en notant toujours $z = x + iy$). Dans le cas où $a \in]-1, 1[$, l'équation $e^z = a + i\sqrt{1 - a^2}$ donne $e^x \cos(y) = a$ et $e^x \sin(y) = \sqrt{1 - a^2}$, soit en passant au carré du module $e^{2x}(\cos^2(y) + \sin^2(y)) = a^2 + 1 - a^2 = 1$, donc $e^{2x} = 1$. On a donc nécessairement $x = 0$, et les conditions deviennent alors simplement $\cos(y) = a$ et $\sin(y) = \sqrt{1 - a^2}$, soit $y \equiv \arccos(a)[2\pi]$ (l'égalité est alors automatiquement vérifiée pour le sinus, qui est toujours positif). Autrement dit, $z = i\arccos(a) + 2ik\pi$. De même, lorsque $e^z = a - i\sqrt{1 - a^2}$, on trouve $x = 0$ et $y = -\arccos(a) + 2k\pi$ (seul le signe du sinus change). Si on regroupe toutes ces valeurs, on se rend compte qu'elles parcourent simplement l'axe imaginaire pur. Ce n'est pas une surprise : si $z = bi$, alors $\operatorname{ch}(z) = \dfrac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} = \cos(b)$, qui appartient certainement à $\mathbb{R}$!

Exercice 3

A. Résolution de l'équation différentielle.

1. L'équation $y' + \frac{1}{2x}y = 0$ admet comme solutions les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{-\frac{1}{2}\ln(x)} = \frac{K}{\sqrt{x}}$.
2. Posons donc $y_p(x) = \frac{K(x)}{\sqrt{x}}$, on a alors $y_p'(x) = \frac{K'(x)\sqrt{x} - \frac{K(x)}{2\sqrt{x}}}{x}$, puis $y_p'(x) + \frac{1}{2x}y_p(x) = \frac{K'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{K(x)}{2x\sqrt{x}} + \frac{K(x)}{2x\sqrt{x}} = \frac{K'(x)}{\sqrt{x}}$. Notre fonction est donc solution de (E) si et seulement si $K'(x) = \frac{1}{1+x}$, soit par exemple $K(x) = \ln(1+x)$, et donc $y_p(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$.
3. Les solutions de l'équation (E) sont toutes les fonctions de la forme $y(x) = \frac{K + \ln(1+x)}{\sqrt{x}}$. La condition $f(1) = \ln(2)$ impose $K + \ln(2) = \ln(2)$, soit $K = 0$. Autrement dit, $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$.

B. Étude de la fonction f.

1. On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (limite classique du cours, obtenue par taux d'accroissement). Or, $f(x) = \sqrt{x} \times \frac{\ln(1+x)}{x}$, qui a donc pour limite 0 quand x tend vers 0. On peut bien prolonger f en posant $f(0) = 0$.
2. On calcule $f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x}}{1+x} - \frac{\ln(1+x)}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x - (1+x)\ln(1+x)}{2x\sqrt{x}(1+x)}$, qui est bien du signe de g.
3. Dérivons une nouvelle fois : $g'(x) = 2 - \frac{1+x}{1+x} - \ln(1+x) = 1 - \ln(1+x)$. Cette dérivée s'annule lorsque $\ln(1+x) = 1$, soit $x = e-1$. La fonction g est donc croissante sur $]0, e-1]$, et décroissante sur $[e-1, +\infty[$. Comme de plus $g(0) = 0$, $g(e-1) > 0$ (nécessairement puisque g est croissante sur $[0, e-1[$), et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ (il suffit pour s'en rendre compte d'écrire que $g(x) = x(2 - \ln(1+x)) - \ln(1+x))$, la fonction g s'annule une seule fois sur $[0, +\infty[$, elle est positive puis négative sur cet intervalle. On en déduit les variations annoncées pour la fonction f.
4. C'est de la croissance comparée. Si on veut vraiment se ramener aux résultats du cours, on écrit par exemple $f(x) = \frac{\ln(x) + \ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}$, et on obtient rapidement que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
5. (a) Posons donc $t = \sqrt{x}$, ou $x = t^2$, ce qui ne modifie pas les bornes de l'intégrale, et implique que $dx = 2t\ dt$. On obtient alors $I = \int_0^1 \frac{4t^2}{1+t^2}\ dt = 4\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\ dt = 4\int_0^1 1 - \frac{1}{1+t^2}\ dt = 4[t - \arctan(t)]_0^1 = 4(1 - \arctan(1)) = 4 - \pi$.

   (b) Posons donc $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\ dx$, et effectuons une IPP en posant $u(x) = \ln(1+x)$, soit $u'(x) = \frac{1}{1+x}$, et $v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, donc $v(x) = 2\sqrt{x}$. On trouve alors $J = [2\sqrt{x}\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\ dx = 2\ln(2) - I$. Il ne reste plus qu'à conclure : $J = 2\ln(2) + \pi - 4$.

Exercice 4

A. Changement de fonction inconnue.

1. On cherche donc une solution à l'équation $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ de la forme $y_0(x) = x^\alpha$. On a alors $y_0'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, puis $y_0''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. En factorisant tout par x^α, la fonction y_0 est donc solution de notre équation si $\alpha(\alpha-1)+3\alpha+1 = 0$, soit $\alpha^2+2\alpha+1 = 0$. L'unique solution de cette équation est $\alpha = -1$, qui donne $y_0(x) = \dfrac{1}{x}$.
2. On pose donc $y(x) = \dfrac{z(x)}{x}$, et on dérive : $y'(x) = \dfrac{xz'(x)-z(x)}{x^2}$, puis $y''(x) = \dfrac{x^3z''(x)-2x^2z'(x)+2xz(x)}{x^4} = \dfrac{x^2z''(x)-2xz'(x)+2z(x)}{x^3}$. On obtient ensuite $x^2y''+3xy'+y = \dfrac{x^2z''-2xz'+2z+3xz'-3z+z}{x} = xz''(x)+z'(x)$. La fonction z' est donc bien solution de l'équation $xz'(x)+z(x) = \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.
3. On normalise l'équation pour l'écrire sous la forme $f' + \dfrac{1}{x}f = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2x^2}$. L'équation homogène correspondante a pour solutions les fonctions $f_h : x \mapsto Ke^{-\ln(x)} = \dfrac{K}{x}$. Pour déterminer une solution particulière, on va simplement procéder par variation de la constante, en posant $f_p(x) = \dfrac{K(x)}{x}$, donc $f_p'(x) = \dfrac{xK'(x)-K(x)}{x^2}$. On obtient alors la condition $\dfrac{K'(x)}{x} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2x^2}$, soit $K'(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2x}$. On choisit par exemple $K(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{\ln(x)}{2}$, soit $f_p(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{\ln(x)}{2x}$. Les solutions générales de notre équation sont donc les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{x}{4} + \dfrac{\ln(x)}{2x} + \dfrac{K}{x} = \dfrac{x}{4} + \dfrac{\ln(x)+L}{2x}$, quitte à multiplier la constante par 2.
4. En reprenant les notations précédentes, $z'(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{\ln(x)+L}{2x}$, donc $z(x) = \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{\ln^2(x)}{4} + K\ln(x) + B$ (finalement, on reprend la constante précédente !). Il ne reste plus qu'à conclure que les solutions de l'équation (F) sont les fonctions $y : x \mapsto \dfrac{x}{8} + \dfrac{\ln^2(x)}{4x} + \dfrac{K\ln(x)}{x} + \dfrac{B}{x}$, où K et B sont deux constantes réelles.

B. Changement de variable.

1. En posant $y(x) = w(\ln(x))$, on aura $y'(x) = \dfrac{w'(\ln(x))}{x}$, puis $y''(x) = \dfrac{w''(\ln(x)) - w'(\ln(x))}{x^2}$. L'équation (F) peut alors s'écrire $w''(\ln(x)) - w'(\ln(x)) + 3w'(\ln(x)) + w(\ln(x)) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2x}$, soit en posant $t = \ln(x)$, et donc $x = e^t$: $w''(t) + 2w'(t) + w(t) = \dfrac{e^t+e^{-t}}{2} = \mathrm{ch}(t)$.
2. Commençons par l'équation homogène : l'équation caractéristique associée $x^2+2x+1 = 0$ admet pour racine double -1. Les solutions homogènes sont donc les fonctions $w_h(t) = (At+B)e^{-t}$. Reste à déterminer une solution particulière. On peut pour cela procéder par superposition. Commençons par chercher une solution de l'équation $w''+2w'+w = \dfrac{e^t}{2}$ sous la forme $w_{p_1}(t) = Ke^t$. Les dérivées étant identiques, on trouve la condition $4Ke^t = \dfrac{e^t}{2}$, soit $K = \dfrac{1}{8}$ et $w_{p_1}(t) = \dfrac{e^t}{8}$. Cherchons désormais une solution particulière à l'équation $w''+2w'+w = \dfrac{e^{-t}}{2}$ sous la forme $w_{p_2}(t) = (at^2+bt+c)e^{-t}$ (on est obligés d'augmenter le degré de 2 puisque -1 est racine double de l'équation caractéristique). On calcule $w_{p_2}'(t) = (-at^2+(2a-b)t+b-c)e^{-t}$, puis

$w''_{p_2}(t) = (at^2 + (b-4a)t + 2a - 2b + c)e^{-t}$, et enfin $w''_{p_2}(t) + 2w'_{p_2}(t) + w_{p_2}(t) = 2ae^{-t}$ (tout le reste se simplifie). On a donc la simple condition $2a = \dfrac{1}{2}$ qui permet de choisir $a = \dfrac{1}{4}$, soit $w_{p_2}(t) = \dfrac{t^2e^{-t}}{4}$. Il ne reste plus qu'à conclure : les solutions de l'équation (G) sont les fonctions $w : t \mapsto (At+B)e^{-t} + \dfrac{e^t}{8} + \dfrac{t^2e^{-t}}{4}$.

3. Il suffit de remplacer t par $\ln(x)$ pour retrouver $y(x) = \dfrac{A\ln(x)+B}{x} + \dfrac{x}{8} + \dfrac{\ln^2(x)}{4x}$, exactement les mêmes formules que par l'autre méthode !