Devoir Surveillé n°3

PTSI B Lycée Eiffel

29 novembre 2014

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{x-1}{x^2}e^{-x}$ définie sur $]0, +\infty[$.

1. Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = e^{-x}\ln(x)$ est une solution particulière de l'équation.
2. Résoudre l'équation.
3. Déterminer sa solution vérifiant $f(1) = 0$ et $f'(1) = \dfrac{1}{e}$.
4. Étudier la solution obtenue à la question précédente, et tracer une allure soignée de sa courbe représentative.

Exercice 2

On cherche dans cet exercice à étendre les fonctions ch et sh au plan complexe en posant, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{ch}(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, et $\operatorname{sh}(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$.

1. La parité des fonctions ch et sh est-elle modifiée par ce prolongement au plan complexe ?
2. Vérifier que, sur $\mathbb{C}$, ch et sh sont des fonctions périodiques (on en précisera une période). Calculer $\operatorname{ch}(z + i\pi)$ et $\operatorname{sh}(z + i\pi)$ en fonction de $\operatorname{ch}(z)$ et $\operatorname{sh}(z)$.
3. Quelques formules faisant intervenir les fonctions ch et sh :
   (a) Démontrer que, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{ch}(\bar{z}) = \overline{\operatorname{ch}(z)}$, et $\operatorname{sh}(\bar{z}) = \overline{\operatorname{sh}(z)}$.
   (b) Montrer que $\operatorname{ch}^2(z) - \operatorname{sh}^2(z) = 1$.
   (c) En posant $z = x+iy$, montrer que $|\operatorname{ch}(z)|^2 = \dfrac{1}{2}(\operatorname{ch}(2x)+\cos(2y))$. Démontrer une formule similaire pour $|\operatorname{sh}^2(z)|$.
   (d) Démontrer les formules d'addition $\operatorname{ch}(z+z') = \operatorname{ch}(z)\operatorname{ch}(z') + \operatorname{sh}(z)\operatorname{sh}(z')$, et $\operatorname{sh}(z+z') = \operatorname{ch}(z)\operatorname{sh}(z') + \operatorname{sh}(z)\operatorname{ch}(z')$.
4. Quelques équations faisant intervenir ch et sh :
   (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $\operatorname{ch}(z) = 0$ et $\operatorname{sh}(z) = 0$.
   (b) Déterminer tous les nombres complexes vérifiant $\operatorname{ch}(z) = 1$, puis ceux pour lesquels $\operatorname{ch}(z) = i$.
   (c) Plus généralement, déterminer tous les nombres complexes pour lesquels $\operatorname{ch}(z) \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

On souhaite dans cet exercice résoudre une équation différentielle, puis étudier une de ses solutions. On note donc (E) l'équation différentielle suivante : $y' + \frac{1}{2x}y = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ (qu'on résoudra bien sûr sur $]0, +\infty[$).

A. Résolution de l'équation différentielle.

1. Résoudre l'équation homogène associée à l'équation (E).
2. Déterminer une solution particulière de (E) à l'aide de la méthode de variation de la constante.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation (E), et déterminer la solution f de cette équation vérifiant $f(1) = \ln(2)$.

B. Étude de la fonction f.

On pose désormais $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$.

1. Montrer qu'on peut prolonger f en une fonction continue sur $[0, +\infty[$ en posant $f(0) = 0$.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f, et montrer qu'elle est du même signe que $g(x) = 2x - (1+x)\ln(1+x)$.
3. Étudier les variations de la fonction g, puis prouver que f est croissante sur $[0, \alpha[$ et décroissante sur $[\alpha, +\infty[$, pour un certain réel positif α qu'on ne cherchera pas à calculer.
4. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
5. On souhaite pour finir calculer $\int_0^1 f(x)\ dx$.
   (a) Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\ dx$ à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{x}$.
   (b) En déduire la valeur de l'intégrale recherchée.

Exercice 4

On se propose dans cet exercice de résoudre de deux façons différentes l'équation différentielle $(F) : x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$. Les deux parties de l'exercice sont donc indépendantes.

A. Changement de fonction inconnue.

1. Montrer que l'équation homogène associée à (F) admet une solution de la forme $y_0(x) = x^\alpha$, pour une valeur de α à déterminer.
2. En posant $y(x) = x^\alpha z(x)$, montrer que y est solution de (F) si et seulement si z' est solution de l'équation du premier ordre $xf' + f = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$.
3. Résoudre l'équation du premier ordre obtenue à la question précédente sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
4. En déduire les solutions de l'équation (F).

B. Changement de variable.

On souhaite résoudre l'équation (F) en effectuant le changement de variable $t = \ln(x)$. On pose donc, pour une fonction y solution de (F), $y(x) = w(\ln(x))$.

1. Montrer que w est solution de l'équation différentielle $(G) : w''(t) + 2w'(t) + w(t) = \mathrm{ch}(t)$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (G).
3. En déduire les solutions de l'équation (F).