

Devoir Surveillé n°2

PTSI B Lycée Eiffel

18 novembre 2014

Durée : 3H45. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Un peu de calculs divers pour commencer en douceur :

1. Calculer et factoriser $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j)^2$.
2. Résoudre l'équation $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.
3. Démontrer par récurrence que, $\forall n \geq 2$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$.
4. On définit deux fonctions f et g par $f(x) = \frac{1}{2} \arctan(\operatorname{sh}(x))$, et $g(x) = \arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)}\right)$.
 - (a) Démontrer à l'aide d'un calcul de dérivée que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.
 - (b) Donner une expression simple de $\operatorname{ch}\left(\frac{\ln(3)}{2}\right)$ et de $\operatorname{sh}\left(\frac{\ln(3)}{2}\right)$.
 - (c) En déduire la valeur de $f\left(\frac{\ln(3)}{2}\right)$. En exploitant le fait que $f = g$, de quel angle peut-on déduire la tangente ?

Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$, et $T_n = \sum_{k=1}^n k^4$. On note également $u_n = \frac{T_n}{S_n}$, et $v_n = 5(u_{n+1} - u_n)$.

1. Rappeler la formule vue en cours pour S_n , et donner les valeurs de S_n pour tous les entiers n inférieurs ou égaux à 5.
2. Donner la valeur de T_n pour ces mêmes entiers (évittez de vous planter en calculant 5^4), et en déduire les valeurs correspondantes de u_n (on simplifiera les fractions obtenues si possible) et v_n .
3. Deviner la valeur de v_n en fonction de n (on ne cherche pas à démontrer cette formule pour l'instant), et en déduire celle de u_n , puis celle de T_n (en utilisant bien sûr à nouveau la formule du cours pour S_n).
4. Démontrer par récurrence que $T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$ (question indépendante des précédentes, je donne la formule pour que ceux qui ont bloqué avant puissent tenter de faire la récurrence).

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 1 + 2 \sin(x) + \sin(2x)$.

1. Calculer les images par f de $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.
2. Déterminer un intervalle d'étude intelligent pour la fonction f .
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f , et étudier les variations de f (on dressera un tableau de variations complet).
4. Déterminer deux intervalles I et J les plus grands possibles tels que f effectue une bijection de I sur J .
5. Tracer une allure soignée de la courbe représentative de la fonction f .

Exercice 4

Le but de ce dernier exercice est de calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)} dx$.

1. Démontrer que, $\forall x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ (on pourra par exemple passer par un calcul de dérivée).
2. On considère une fonction f définie et strictement monotone sur $[0, a]$, et vérifiant $f(0) = 0$, et on note g sa réciproque.
 - (a) On veut prouver que, $\forall x \in [0, a]$, $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} g(t) dt = xf(x)$. Faire un dessin clair expliquant ce résultat à l'aide de calculs d'aires.
 - (b) Exprimer $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} g(t) dt$ à l'aide de primitives F et G des fonctions f et g .
 - (c) Redémontrer rigoureusement la formule souhaitée.
3. On veut calculer dans cette question $J = \int_0^1 \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$.
 - (a) Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que $x^4 + 1 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)P(x)$.
 - (b) Effectuer la décomposition en éléments simples de $\frac{x^2}{x^4 + 1}$, sous la forme $\frac{ax + b}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \frac{cx + d}{P(x)}$.
 - (c) Calculer l'intégrale J , et mettre le résultat sous la forme la plus simple possible (en utilisant le résultat de la question 1).
4. Justifier que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\arctan(x)}$ est bijective de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ vers un intervalle à préciser, et donner l'expression de sa réciproque g .
5. Calculer $\int_0^1 g(x) dx$ et appliquer le résultat de la question 2 pour en déduire la valeur de I .