Devoir Surveillé n°1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

27 septembre 2014

Exercice 1

1. Les nombres dont la partie entière est inférieure ou égale à 2 sont ceux qui sont strictement inférieurs à 3. On se ramène donc à la résolution de l'inéquation du second degré $x^2-3x-4<0$. Son discriminant vaut $\Delta = 9+16 = 25$, et elle admet pour racines $x_1 = \dfrac{3-5}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{3+5}{2} = 4$. Le trinôme étant négatif entre ses racines, on en déduit que $\mathcal{S} =]-1,4[$.
2. Il faut faire attention à deux choses ici : le signe dans la valeur absolue bien sûr, mais aussi celui de $2-x$ qui peut changer le sens de l'inégalité si on le passe à gauche, ce qu'on a bien envie de faire. Séparons donc trois cas pour la résolution :
   - sur $]-\infty,1]$, $1-x$ et $2-x$ sont tous les deux positifs, et on se ramène donc à l'inéquation $(1-x)(2-x) \leq x$, soit $x^2-4x+2 \leq 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 16-8 = 8$, et s'annule pour $x_1 = \dfrac{4-\sqrt{8}}{2} = 2-\sqrt{2}$ et $x_2 = 2+\sqrt{2}$. Le trinôme est négatif entre ses racines, donc sur $[2-\sqrt{2},1]$ (la seconde racine étant supérieure à 1).
   - sur $[1,2[$, $|1-x| = x-1$, mais $2-x$ reste positif, ce qui nous ramène à l'inéquation $(x-1)(2-x) \leq x$, soit $-x^2+2x-2 \leq 0$. On trouve pour discriminant $\Delta = 4-8 = -4$, notre trinôme est donc toujours négatif. Autrement dit, l'inéquation est toujours vérifiée sur $[1,2[$.
   - sur $]2,+\infty[$, pas besoin de se fatiguer, le membre de droite de notre inéquation est négatif et ne peut donc pas être plus grand qu'une valeur absolue.

   Conclusion : $\mathcal{S} = [2-\sqrt{2},2[$.
3. L'inéquation n'a de sens que si $x>0$, on pose ensuite $X = \ln(x)$ pour se ramener à $2X^3-5X^2+2X \leq 0$, soit $X(2X^2-5X+2) \leq 0$. Déterminons le signe de la parenthèse : le trinôme a pour discriminant $\Delta = 25-16 = 9$ et admet pour racines $X_1 = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2}$, et $X_2 = \dfrac{5+3}{4} = 2$. On peut dresser le tableau de signes suivant :

X	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
X^2-5X+2		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$X(X^2-5X+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

   On doit donc avoir $X \in]-\infty,0] \cup \left[\dfrac{1}{2},2\right]$, soit en repassant à l'exponentielle (qui donne des valeurs positives pour x), $\mathcal{S} =]0,1] \cup [\sqrt{e},e^2]$.
4. Commençons par tout mettre à gauche et par multiplier l'équation par e^x pour obtenir l'équation équivalente $2e^{3x}+3e^{2x}-11e^x-6=0$. On pose évidemment ensuite $e^x = X$ pour se ramener à l'équation du troisième degré $2X^3+3X^2-11X-6=0$. On remarque que 2 est une racine évidente : $2\times 2^3+3\times 2^2-11\times 2-6 = 16+12-22-6 = 0$. On peut donc factoriser sous la forme $2X^3+3X^2-11X-6 = (X-2)(aX^2+bX+c) = aX^3+(b-2a)X^2+(c-2b)X-2c$. Par identification des coefficients, on obtient les conditions $a=2$; $b-2a=3$, soit $b=7$; $c-2b=-11$ soit $c=3$; et $-2c=-6$ qui est bien vérifiée. Finalement, notre équation se

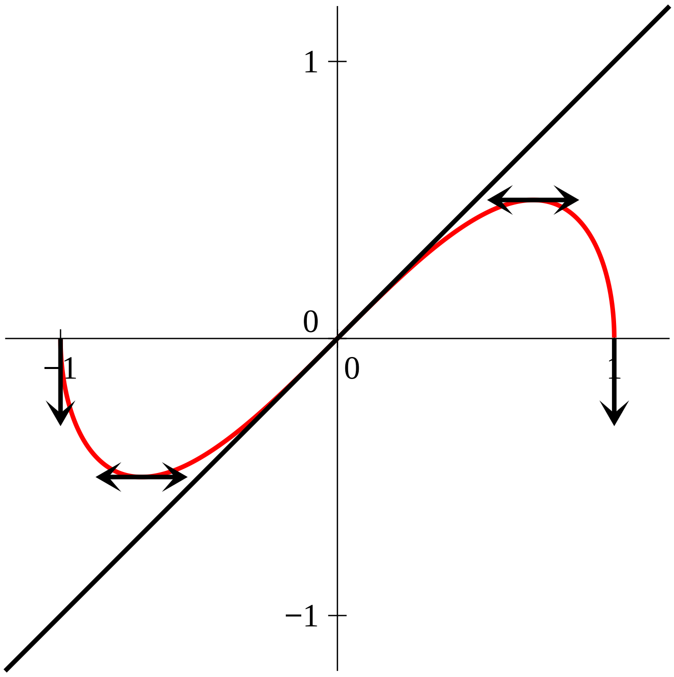
factoriser en $(X-2)(2X^2+7X+3)=0$. La parenthèse a pour discriminant $\Delta = 49-24 = 25$, et admet pour racines $X_1 = \dfrac{-7-5}{4} = -3$ et $X_2 = \dfrac{-7+5}{4} = -\dfrac{1}{2}$. Les valeurs négatives de X étant à exclure puisqu'on a posé $X = e^x$, une seule solution est valide : $\mathcal{S} = \{\ln(2)\}$.

Exercice 2

1. La fonction f est définie quand $x^2 \leq 1$, donc $\mathcal{D}_f = [-1, 1]$. La racine carrée n'étant pas dérivable en 0, f ne sera vraisemblablement pas dérivable quand $1-x^2$ s'annule, c'est-à-dire pour $x=1$ et $x=-1$.
2. Si $-1 \leq 1$, alors $0 \leq 1-x^2 \leq 1$, donc $\sqrt{1-x^2} \leq 1$. Comme $|x| \leq 1$, on en déduit que $|x|\sqrt{1-x^2} \leq 1$ (les deux termes du produit sont positifs), soit $-1 \leq x\sqrt{1-x^2} \leq 1$.
3. La fonction f est dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée $f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \times \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. Le numérateur de cette dérivée s'annule lorsque $x^2 = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire pour $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et il est positif entre les deux racines (qui appartient bien à $\mathcal{D}_f$. On remarque que $f(1) = f(-1) = 0$, et $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$. Sans surprise, $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{2}$, la fonction f étant manifestement impaire. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

4. On sait que $\lim\limits_{x\to\pm 1} \sqrt{1-x^2} = 0^+$ (là où ça a un sens, on ne peut tendre vers 0 que par valeurs positives puisque la racine carrée est positive). Comme $\lim\limits_{x\to\pm 1} 1-2x^2 = -1$, on en déduit facilement que $\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty$. Il y aura en ces deux points des tangentes verticales à $\mathcal{C}_f$.
5. Calculons à nouveau : $f''(x) = \dfrac{-4x\sqrt{1-x^2} - (1-2x^2) \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \dfrac{-4x(1-x^2) + x(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} = \dfrac{2x^3-3x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Cette dérivée seconde est du signe de son numérateur $2x^3 - x = x(2x^2-3)$. La parenthèse s'annule en $x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, valeurs situées en-dehors de l'intervalle $[-1,1]$, elle est toujours négative sur $[-1,1]$. On en déduit que $f''(x)$ est de signe opposé à celui de x, c'est-à-dire positive sur $]-1,0]$ et négative sur $[0,1[$. En particulier, elle s'annule uniquement pour $x=0$. Comme $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, la tangente en ce point a pour équation $y = x$.
6. Calculons donc $f(x) - x = x(\sqrt{1-x^2} - 1)$. On a déjà signalé plus haut que $\sqrt{1-x^2} \leq 1$ sur $\mathcal{D}_f$, donc le signe de $f(x) - x$ est opposé à celui de x. La courbe est au-dessus de sa tangente sur $[-1,0]$ et en-dessous sur $[0,1]$.
7. Et une première courbe, une :



Exercice 3

1. La fonction f n'est pas définie si $x^2 - x - 2 = 0$, équation de discriminant $\Delta = 1 + 9$, et admettant pour solutions $x_1 = \dfrac{1-3}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2$. On a donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1; 2\}$.
2. Commençons par les images : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left|\dfrac{\frac{5}{2}}{-\frac{9}{4}}\right| = \dfrac{10}{9}$; et $f(-\sqrt{2}) = \left|\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{2} - 1$. Pour les antécédents de 1, il faut résoudre l'équation $|x + 2| = |x^2 - x - 2|$, ce qui donne deux possibilités : soit $-x - 2 = x^2 - x - 2$, donc $x = 0$; soit $x + 2 = x^2 - x - 2$, donc $x^2 - 2x - 4$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 16 = 20$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{20}}{2} = 1 - \sqrt{5}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{5}$. Le réel 1 a donc trois antécédents par f : $1 - \sqrt{5}$, 0 et $1 + \sqrt{5}$. Pour -2, aucun calcul à faire, il ne peut pas avoir d'antécédents puisque f ne prend que des valeurs positives. Pour 3, on utilise la même méthode que pour 1 : soit $x+2 = 3x^2 - 3x - 6$, donc $3x^2 - 4x - 8 = 0$, discriminant $\Delta = 16+96 = 112 = 7\times 16$, racines $x_3 = \dfrac{4-\sqrt{116}}{6} = \dfrac{2-2\sqrt{7}}{3}$ et $x_4 = \dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}$; soit $-x - 2 = 3x^2 - 3x - 6$, donc $3x^2 - 2x - 4 = 0$, discriminant $\Delta = 4 + 48 = 52 = 4 \times 13$, racines $x_5 = \dfrac{2-\sqrt{52}}{6} = \dfrac{1-\sqrt{13}}{3}$ et $x_6 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{3}$. Le réel 3 a donc quatre antécédents qu'on n'a pas très envie de recopier.
3. On se ramène à l'inéquation $|x+2| - |x^2 - x - 2| \geq 0$, et on peut par exemple faire un tableau :

x	$-\infty$	-2		-1		2		$+\infty$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	0	$x+2$		$x+2$		$x+2$	
$\lvert x^2-x-2\rvert$	x^2-x-2		x^2-x-2	0	$-x^2+x+2$	0	x^2-x-2	
$\lvert x+2\rvert - \lvert x^2-x-2\rvert$	$-x^2$		$-x^2+2x+4$		x^2		$-x^2+2x+4$	

L'inéquation n'est jamais vérifiée sur $]-\infty, -2]$, et elle l'est toujours sur $]-1, 2[$. Sur les deux intervalles restants, $-x^2 + 2x + 4$ est positif entre ses racines, donc sur $[1 - \sqrt{5}, -1[$ (le nombre $1 - \sqrt{5}$ étant compris entre -2 et -1) et sur $]2, 1 + \sqrt{5}]$. Conclusion : $\mathcal{S} = [1 - \sqrt{5}, -1[\cup] - 1, 2[\cup]2, 1 + \sqrt{5}] = [1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}]\backslash\{-1, 2\}$.

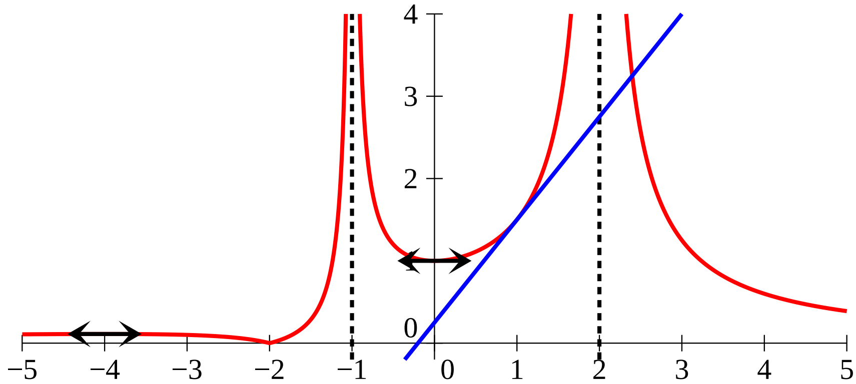
4. Le quotient $\dfrac{x+2}{x^2-x-2}$ a pour limite 0 en $\pm\infty$ (quotient des termes de plus haut degré), donc f aussi. En -1 et en 2, le dénominateur s'annule mais pas le numérateur, ce qui assure que $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$ (la valeur absolu étant de toute façon positive).

5. Posons $g(x) = \dfrac{x+2}{x^2-x-2}$ et étudions les variations et le signe de g. La fonction g est dérivale sur $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_f$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{x^2-x-2-(2x-1)(x+2)}{(x-2-x-2)^2} = \dfrac{-x^2-4x}{(x^2-x-2)^2} = \dfrac{x(-x-4)}{(x^2-x-2)^2}$. On sait déjà que $g(0) = -1$ et $g(-4) = \dfrac{-2}{18} = -\dfrac{1}{9}$. De plus, la fonction g change de signe en -2, -1 et 2, elle est négative sur $]-\infty,-2]$ et sur $]-1,2[$ et positive sur $[-2,-1[$ et sur $]2,+\infty[$. On peut donc dresser le tableau suivant :

x	$+\infty$		-4		-2		-1		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
g	0	$\searrow$	$-\frac{1}{9}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$		$-$	$\Vert$	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{9}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0

6. Pour $x = 1$, on calcule $f(1) = -g(1) = \dfrac{3}{2}$ et $f'(1) = -g'(1) = \dfrac{5}{4}$ (f est opposée à g sur tout l'intervalle $]-1,2[$), l'équation recherchée est donc $y = \dfrac{5}{4}(x-1) + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{4}x + \dfrac{1}{4}$.

7. Et une deuxième courbe :



Exercice 4

1. On écrira bien sûr $f_a(x) = e^{x\ln(x-a)}$ pour toute la suite de l'exercice. En particulier, $\mathcal{D}_{f_a} =]a,+\infty[$. Indépendemment de la valeur de a, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$. De l'autre côté, on aura toujours $\lim\limits_{x\to a} \ln(x-a) = -\infty$. Si $a < 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to a} x\ln(x-a) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$. Au contraire, si $a > 0$, on aura $\lim\limits_{x\to a} x\ln(x-a) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to a} f_a(x) = 0$. Enfin, cas particulier pour $x = 0$, on recourt à la croissance comparée pour affirmer que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f_0(x) = 1$.

2. Une question facile : la fonction est dérivable sur son domaine de définition et $f_a'(x) = \left(\ln(x-a) + \dfrac{x}{x-a}\right) e^{x\ln(x-a)}$.

3. Si $a = 0$, $f_0(x) = x^x$, et $f_0'(x) = (\ln(x)+1)e^{x\ln(x)}$, qui est du signe de $\ln(x)+1$. En particulier, la dérivée s'annule pour $x = \dfrac{1}{e}$, et $f_0\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$ (on ne peut pas simplifier plus). D'où le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f	1	$\searrow$	$\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Comme le signe de la dérivée calculée plus haut n'a rien d'évident, posons $g_a(x) = \ln(x-a) + \dfrac{x}{x-a}$, et dérivons à nouveau pour tenter de trouver le signe : g_a est dérivable et $g_a'(x) = \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{x-a-x}{(x-a)^2} = \dfrac{x-2a}{(x-a)^2}$. Cette dérivée étant strictement positive sur $]a, +\infty[$, g_a est strictement croissante sur son domaine de définition. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} g_a(x) = +\infty$, et, en écrivant par exemple $g_a(x) = \dfrac{(x-a)\ln(x-a)+a}{x-a}$, la croissance comparée permet d'affirmer que le numérateur de la fraction tend vers a quand x tend vers a, et donc que $\lim\limits_{x\to a} g_a(x) = -\infty$. La fonction g_n effectue donc une bijection de $]a, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, et s'annule en particulier une seul fois sur cet intervalle. Peut-on savoir quand ? Non, c'est trop compliqué. Contentons-nous donc de constater que f_a sera décroissante puis croissante sur $]a, +\infty[$. Si on veut vraiment dire plus, on peut calculer $g_a(0) = \ln(-a)$, et constater que $g_a(0) > 0$ si et seulement si $a < -1$. Dans ce cas, le minimum de f_a sera atteint dans l'intervalle $]a, 0[$. Si $a \in]-1, 0[$, le minimum sera atteint sur $]0, +\infty[$. Dans le cas particulier où $a = -1$, f_{-1} atteint son minimum en 0, de valeur $f_{-1}(0) = e^0 = 1$ (on peut d'ailleurs constater qu'on a toujours $f_a(0) = 1$ quand f_a est définie en 0).

5. Dans le cas où $a > 0$, le calcul effectué pour la dérivée de g_a reste valable, et cette dérivée est décroissante sur $]a, 2a]$, et croissante ensuite. Les limites de g_a en a et en $+\infty$ sont toutes deux égales à $+\infty$ (mêmes calculs que ci-dessus). Le signe de g_a dépend donc du signe de son minimum, c'est-à-dire de $g_a(2a) = \ln(a)+2$. Pour que g_a (et donc f_a') s'annule une unique fois, il faut avoir $g_a(2a) = 0$, c'est-à-dire $\ln(a)+2 = 0$. La valeur recherchée est donc $\alpha = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$.

6. Si $a > \alpha$, par croissance de la fonction ln, $g_a(2a) = \ln(a) + 2 > 0$, et la fonction g_a est donc toujours strictement positive, ce qui implique bien que f_a sera strictement croissante sur son domaine de définition.

7. Au contraire, si $a < \alpha$, g_a a un minimum strictement négatif, et (d'après le théorème de la bijection), sera donc bijective d'une part de $]a, 2a]$ vers un intervalle $[g_a(2a), +\infty[$ contenant 0, d'autre part de $[2a, +\infty[$ vers ce même intervalle. En particulier, g_a et f_a' s'annulent donc exactement deux fois, une fois dans l'intervalle $]a, 2a]$, une autre dans l'intervalle $[2a, +\infty[$, ce qui correspond à ce que demande l'énoncé.

8. À nouveau une question facile : si $a < b$, on aura toujours $\ln(x-a) < \ln(x-b)$ pour les valeurs de x pour lesquelles ces deux expressions sont définies, et donc $f_a(x) < f_b(x) \Leftrightarrow x > 0$. La courbe représentative de f_a est donc en-dessous de celle de f_b sur $\mathbb{R}^{+*}$ (ou sur un le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{+*}$ sur lequel les deux fonctions sont définies), et au-dessus quand $x < 0$. Les courbes qui sont définies en 0 se coupent au point de coordonnées $(0, 1)$, comme on l'a déjà signalé plus haut.

9. On a déjà donné le tableau de variations complet de f_0, ainsi que toutes les information intéressantes concernant f_{-1}. La fonction f_1 est strictement croissante sur $]1,+\infty[$, avec une limite nulle en 1. Enfin, $f_{\frac{1}{10}}$ est croissante sur $\left]\frac{1}{10}, x_1\right]$, pour une valeur de x_1 comprise entre $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{5}$ (et avec une limite nulle en $\frac{1}{10}$), puis décroissante sur $[x_1, x_2]$ avec $x_2 > \frac{1}{5}$ (mais on n'en sait pas beaucoup plus) et à nouveau croissante ensuite. Voici les courbes tracées sur ordinateur, $a = 0$ en rouge, $a = -1$ en bleu, $a = 1$ en vert et $a = \frac{1}{10}$ en orange (exceptionnellement sans tangentes horizontales pour ne pas surcharger) :