Devoir Surveillé n°1

PTSI B Lycée Eiffel

27 septembre 2014

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\mathrm{Ent}(x^2 - 3x - 1) \leq 2$
2. $|1 - x| \leq \dfrac{x}{2 - x}$
3. $2(\ln(x))^3 - 5(\ln(x))^2 + 2\ln(x) \leq 0$
4. $2e^{2x} + 3e^x - 6e^{-x} = 11$

Exercice 2

On pose pour tout cet exercice $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f. La fonction f est-elle dérivable en tout point de son domaine de définition ?
2. Montrer (sans utiliser les variations de la fonction) que $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) \in [-1, 1]$.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f, et en déduire son tableau de variations.
4. Déterminer les limites de f' quand x tend vers 1 et -1. Que peut-on en déduire pour les points correspondants de $\mathcal{C}_f$?
5. Calculer la dérivée seconde f'' de la fonction f, et étudier son signe. Vérifier en particulier que f'' s'annule une seule fois, et déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point correspondant.
6. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de la tangente calculée à la question précédente.
7. Tracer une allure soignée de $\mathcal{C}_f$ en tenant compte de tous les calculs précédents.

Exercice 3

On considère dans tout cet exercice la fonction f définie par $f(x) = \left|\dfrac{x+2}{x^2-x-2}\right|$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Déterminer l'image par f de $\dfrac{1}{2}$ et de $-\sqrt{2}$ (en donnant la forme la plus simple possible), ainsi que les antécédents par f de 1, de -2 et de 3.
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 1$.
4. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
5. Étudier les variations de f, et en déduire un tableau de variations complet de la fonction.
6. Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse 1.
7. Tracer une allure de la courbe représentative de f, ainsi que de la tangente calculée à la question précédente.

Exercice 4

On cherche dans ce dernier exercice à étudier la famille des fonctions f_a définies pour toute valeur de $a \in \mathbb{R}$ par $f_a(x) = (x-a)^x$.

1. Déterminer le domaine de définition de f_a, ainsi que les limites de f_a aux bornes de ce domaine.
2. Calculer la dérivée $f_a'(x)$ de la fonction f_a.
3. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f_0.
4. Étudier les variations de la fonction f_a dans le cas où $a < 0$.
5. Montrer qu'il existe une seule valeur de a strictement positive pour laquelle f_a' s'annule exactement une fois, sans changer de signe. On notera cette valeur α.
6. Vérifier que, si $a > \alpha$, f_a est strictement croissante sur son domaine de définition.
7. Montrer que, si $a \in]0, \alpha[$, f_a' s'annule en deux valeurs x_1 et x_2 vérifiant $a < x_1 < 2a < x_2$.
8. Étudier les positions relatives des courbes représentatives des différentes fonctions f_a.
9. Tracer une allure possible de la courbe représentative de la fonction $f_{\frac{1}{10}}$. Tracer sur le même graphique une allure des courbes des fonctions f_0, f_1 et f_{-1}.