Devoir Maison n°8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

5 mai 2015

Problème

1. Puisqu'on sait que l'élève mange à l'heure 0, l'énoncé nous donne immédiatement $a_1 = c_1 = \frac{1}{2}$ et $b_1 = 0$. Pour les probabilités suivantes, on est obligés d'utiliser la formule des probabilités totales (ou de faire un arbre complet jusqu'à la troisième heure, ce qui n'est pas encore trop violent) : $a_2 = \frac{1}{4}c_1 = \frac{1}{8}$ (il ne peut travailler que s'il dormait à l'heure précédente, on sait déjà qu'il ne mangeait pas), $b_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}c_1 = \frac{3}{8}$, et $c_3 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}c_1 = \frac{1}{2}$. Sur le même principe, $a_3 = \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{4}c_2 = \frac{5}{16}$, $b_3 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}c_2 = \frac{3}{16}$ et $c_3 = \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{2}b_3 + \frac{1}{2}c_3 = \frac{1}{2}$.

2. On peut le voir comme une application de la formule de Bayes, on sait que $P_{A_2}(C_3) = \frac{1}{2}$, donc $P_{C_3}(A_2) = \frac{P_{A_2}(C_3) \times P(A_2)}{P(C_3)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$.

3. Les événements A_n, B_n et C_n formant évidemment un système complet d'événements, une application directe de la formule des probabilités totales donne tout de suite $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n$; $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$ (on ne fait que généraliser les formules déjà appliquées à la première question).

4. (a) Puisqu'on a un système complet d'événements, on sait déjà que $a_n + b_n + c_n = 1$ (inutile de faire le moindre calcul, mais on peut aussi vérifier à l'aide des formules de récurrence), donc (u_n) est constante égale à 1. Pour (v_n), il est clairement plus malin de prendre $v_n = a_n + b_n - c_n$, on paur alors calculer en utilisant les relations de la question 3 : $v_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n + \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}c_n - \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}b_n - \frac{1}{2}c_n = 0$. Seule la valeur initiale v_0 est égale à 1, ensuite la suite est nulle.

   (b) Comme $u_n - v_n = 2c_n$, on en déduit imméiatement que $2c_n = 1$, soit $c_n = \frac{1}{2}$ à partir du rang 1. On peut alors réécrire les relations de récurrence pour les deux autres suites : $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{8}$, et $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{8}$. Or, on sait que $a_n + b_n + c_n = 1$, soit $b_n = \frac{1}{2} - a_n$, donc $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - a_n\right) + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}a_n$. La suite (a_n) est donc arithmético-géométrique (attention quand même, la relation n'est vraie qu'à partir du rang 1), son équation de point fixe $x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}x$ donne $x = \frac{1}{4}$, et on peut donc poser $\alpha_n = a_n - \frac{1}{4}$. Vérifions que la suite (α_n) est géométrique : $\alpha_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}a_n = -\frac{1}{2}\alpha_n$. La suite (α_n) a donc pour raison $-\frac{1}{2}$ et pour premier terme $\alpha_1 = a_1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, on en déduit que $\alpha_n = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, puis $a_n = \alpha_n + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$.

Plusieurs possibilités pour en déduire la valeur de b_n, bien entendu sans refaire de calcul longs : on peut par exemple exploiter que $b_n = \frac{1}{2} - a_n = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$.

(c) La limite de (c_n) est bien sûr égale à $\frac{1}{2}$, les deux autres suites ont pour limite $\frac{1}{4}$. On en déduit qu'à long terme, le taupin va dormir la moitié du temps, manger le quart du temps et quand même travailler le quart du temps restant.

5. (a) En modifiant l'énoncé et en posant $X_n = \begin{pmatrix} c_n \\ a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, on pose simplement $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Il suffit de faire une petite récurrence. La propriété est sûrement vérifiée au rang 0 puisque $A^0 X_0 = X_0$, et si on la suppose vraie au rang n, alors $X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$, ce qui prouve l'hérédité.

(c) Commençons donc par calculer $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$, puis $A^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & \frac{5}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{16} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$. On vérifie alors facilement que $A^3 = \frac{1}{2}(A^2 + A)$. La matrice A ne peut pas être inversible : si c'était le cas, on pourrait écrire $2A^3 - A^2 - A = A(2A^2 - A - I) = 0$, donc $2A^2 - A - I = 0$ (en multipliant par A^{-1}). Or, $2A^2 - A$ n'est pas du tout la matrice identité (ça ne marche même pas pour le premier coefficient). La matrice A n'est donc pas inversible.

(d) Utilisons par exemple la méthode du système : $\begin{cases} x \quad - z = a \\ x - y + z = 2b \\ x + y + z = 2c \end{cases}$ (en multipliant par 2 les dernières équations pour ne pas trainer de fractions). La différence des deux dernières équations donne immédiatement $2y = 2c - 2b$, soit $y = c - b$. La somme des deux premières donne alors $2x - y = a + 2b$, soit $x = \frac{1}{2}a + b + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$. Enfin, $z = x - a = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$. On conclut à l'inversibilité de la matrice P, et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(e) On calcule donc $AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On prouve ensuite par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$: c'est vrai trivialement au rang 0 puisque $P^{-1}IP = I = A^0$, et en supposant la formule vraie au rang n, on aura $A^{n+1} = A \times A^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Les puissances de la matrice D étant triviales, il ne reste plus qu'un petit calcul matriciel pour terminer : $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & (-\frac{1}{2})^{n+1} & 0 \\ \frac{1}{2} & -(-\frac{1}{2})^{n+1} & 0 \end{pmatrix}$, puis $PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} - (-\frac{1}{2})^{n+1} & \frac{1}{4} + (-\frac{1}{2})^{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} + (-\frac{1}{2})^{n+1} & \frac{1}{4} - (-\frac{1}{2})^{n+1} \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à appliquer la formule $X_n = A^nX_0$ pour retrouver $c_n = \frac{1}{2}$; $a_n = \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et $b_n = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

6. (a) La linéarité est triviale. Pour le noyau, on va évidemment résoudre le système $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x \quad + 2z = 0 \\ x + 2y \quad = 0 \end{cases}$ (comme d'habitude, on multiplie pour éviter les fractions).

On a donc $x=-2z$ et $y=z$, et la première équation est alors toujours vérifiée. On a donc $\ker(f)=\{(-2z,z,z)\mid z\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((-2,1,1))$. En particulier, $\dim(\ker(f))=1$, et le théorème du rang nous permet d'affirmer que $\dim(\mathrm{Im}(f))=2$. Pour l'image, on peut bien sûr calculer les images des vecteurs de la base canonique, ou plutôt de ces vecteurs multipliés par 4, 2 et 2 pour éviter les fractions : $\dim(\mathrm{Im}(f))=\mathrm{Vect}((2,1,1);(1,0,1);(1,1,0))$. Le premier vecteur étant la somme des deux autres, une base de l'image est $((1,0,1);(1,1,0))$. L'application n'étant pas injective (ni surjective), ce n'est pas un automorphisme.

(b) Encore des systèmes à résoudre. Attention, si on multiplie pour éviter les fractions, à ne pas oublier de multiplier aussi le membre de droite. Pour F, on se ramène donc à $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2x \\ x & & & + & 2z & = & 4y \\ x & + & 2y & & & = & 4z \end{array}\right.$, soit $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 4y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right.$. En soustrayant les deux dernières équations, $6z-6y=0$, soit $y=z$. La première équation donne alors $x=2z$, et le système est complètement vérifié avec ces deux conditions. On en déduit que $F=\mathrm{Vect}((2,1,1))$. De même, pour G, on résout $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & -x \\ x & & & + & 2z & = & -2y \\ x & + & 2y & & & = & -2z \end{array}\right.$. Cette fois, la soustraction des deux dernières équations donne $y=-z$, et la première équation donne alors $2x=-y-z$, soit $x=0$. On en déduit aisément que $G=\mathrm{Vect}((0,1,-1))$.

(c) On veut donc écrire un vecteur $u=(x,y,z)$ sous la forme $u=a(-2,1,1)+b(2,1,1)+c(0,1,-1)$, ce qui nous ramène à nouveau à un beau système : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2a & + & 2b & & & = & x \\ a & + & b & + & c & = & y \\ a & + & b & - & c & = & z \end{array}\right.$.

Pour changer, soustrayons les deux dernières équations : $2c=y-z$, donc $c=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z$. On a donc $b-a=\frac{1}{2}x$ et $b+a=y-c=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z$, d'où $a=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z$ et $b=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z$. Autrement dit, $u_H=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z;-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z;-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z\right)$; $u_F=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z;\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z;\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z\right)$, et $u_G=\left(0;\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z;-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\right)$.

(d) Les trois coordonnées de $p\circ p(x,y,z)$ sont respectivement égales à :

- $\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z+\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}y+\frac{1}{8}z+\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}y+\frac{1}{8}z=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z$
- pareil qu'au-dessus en divisant tout par 2.
- pareil que juste au-dessus.

Ouf, p est bien un projecteur. On fait pareil pour q :

- 0
- $\frac{1}{4}y-\frac{1}{4}z+\frac{1}{4}y-\frac{1}{4}z=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z$
- $-\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z-\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z$

Là encore, on a un projecteur. Dernière vérification :

- $\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}y-\frac{1}{4}z+\frac{1}{8}x-\frac{1}{8}y-\frac{1}{8}z+\frac{1}{8}x-\frac{1}{8}y-\frac{1}{8}z=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z$
- pareil avec un facteur $-\frac{1}{2}$
- pareil que juste au-dessus.

Bon, on a bien nos trois projecteurs. Y a-t-il moyen d'éviter les calculs pénibles pour les composées par f ? Oui, bien sûr, par définition, quel que soit le vecteur u, $p(u)\in F$, ce qui revient à dire que $p(u)\in\ker(f-\mathrm{id})$, donc $f(p(u))=p(u)$, ce qui revient à dire que $f\circ p=p$. De même, $f\circ q=-\frac{1}{2}q$ et $f\circ r=0$.

(e) On peut toujours faire un ou deux petits calculs pour comprendre ce qui se passe : $p+q+$

$r = \mathrm{id} = f^0$. Ensuite, $f = f \circ \mathrm{id} = f \circ (p+q+r) = p - \frac{1}{2}q$. Puis $f^2 = f \circ \left(p - \frac{1}{2}q\right) = p + \frac{1}{4}q$.
On devine facilement que $f^n = p + \left(-\frac{1}{2}\right)^n q$, et on le démontre par une récurrence triviale (non, franchement, elle est vraiment triviale, celle-là). En reprenant les expressions de p et de q, on a donc $f^n(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z;\right.$
$\left.\frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) y + \left(\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) z; \frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) y + \left(\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) z\right)$.

(f) En fait c'est très simple, on a tout simplement $(c_{n+1}; a_{n+1}; b_{n+1}) = f(c_n; a_n; b_n)$. On en déduit (encore une récurrence triviale) que $(c_n, a_n, b_n) = f^n(c_0, a_0, b_0)$, ce qui permet de retrouver très facilement les valeurs prises par nos trois suites.