Devoir Maison n°8

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 5 mai 2015

Problème : étude de l'activité d'un préparationnaire.

On décide d'observer l'activité d'un élève de PTSI sur une longue période. On note l'activité effectuée par l'élève toutes les heures, et on remarque les choses suivantes :

- l'élève n'a que trois activités différentes : manger, dormir, ou travailler (des exercices de proba de préférence).
- à l'heure numérotée 0 où on commence l'expérience, l'élève mange.
- s'il travaille à une certaine heure n, il mangera à l'heure suivante avec probabilité $\frac{1}{2}$, et dormira avec probabilité $\frac{1}{2}$ (mais il ne travaille pas à nouveau, faut pas pousser, pas deux heures de suite quand même).
- s'il mange à l'heure n, il travaillera à l'heure suivante avec proba $\frac{1}{2}$, et dormira avec proba $\frac{1}{2}$ également (et ne mangera donc jamais, il surveille sa ligne, et il faut le temps de digérer le grec avant d'aller se faire un McDo).
- s'il dort à l'heure n, il travaillera à l'heure suivante avec proba $\frac{1}{4}$, mangera avec proba $\frac{1}{4}$, et continuera à roupiller avec proba $\frac{1}{2}$.

On impose les notations suivantes pour tout l'exercice : on note A_n l'événement « L'élève travaille à l'heure n » ; B_n l'événement « L'élève mange à l'heure n » et C_n l'événement « L'élève dort à l'heure n ». On notera a_n, b_n et c_n les probabilités correspondantes.

1. Calculer les probabilités a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 et c_3.
2. Calculer la probabilité conditionnelle $P_{C_3}(A_2)$.
3. À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
4. Première méthode de calcul des probas : avec des suites.
   (a) On pose $u_n = a_n + b_n + c_n$ et $v_n = a_n - b_n - c_n$, montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont très particulières, et donner leur valeur.
   (b) En déduire la valeur de a_n, puis calculer b_n et c_n (on utilisera des suites arithmético-géométriques à un moment ou à un autre).
   (c) Déterminer les limites des trois suites quand n tend vers $+\infty$, et interpréter les résultats obtenus.
5. Deuxième méthode : à l'aide de matrices.

(a) On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.

(b) Prouver rigoureusement que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

(c) Exprimer A^3 à l'aide de A^2 et de A. La matrice A est-elle inversible ?

(d) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

(e) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$, puis en déduire A^n (il y a un peu de calcul), et retrouver les valeurs de a_n, b_n et c_n.

6. Troisième méthode : un peu d'applications linéaires.

(a) On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = \left(\frac{x+y+z}{2}; \frac{x}{4} + \frac{z}{2}; \frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right)$. Montrer que f est une application linéaire et déterminer son noyau et son image (on donnera une base de chaque). L'application est-elle est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

(b) Calculer $F = \ker(f - \mathrm{id})$ et $G = \ker\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{id}\right)$?

(c) Montrer que tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ peut se décomposer de manière unique sous la forme $u = u_F + u_G + u_H$, avec $u_F \in F$, $u_G \in G$ et $u_H \in \ker(f)$.

(d) On note p, q et r les trois applications $u \mapsto u_F$; $u \mapsto u_G$ et $u \mapsto u_H$. Montrer que ces trois applications sont des projecteurs, et déterminer ce que valent $f \circ p$, $f \circ q$ et $f \circ r$ (on doit obtenir des choses simples à exprimer en fonction de p, q et r).

(e) En déduire une expression de f^n à l'aide de p, q et r, puis donner l'expression explicite de $f^n(x, y, z)$.

(f) Quel est le rapport avec le reste du problème ?