# Devoir Maison n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

9 avril 2015

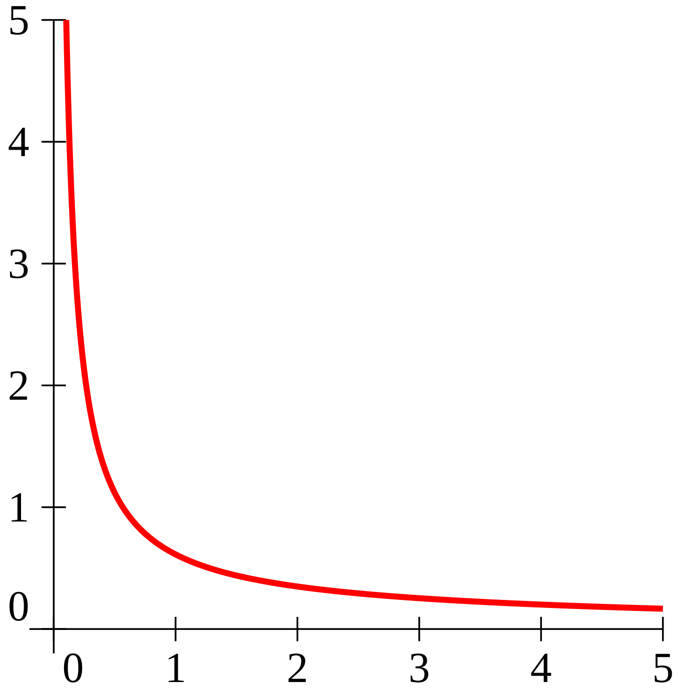
## Exercice : espaces vectoriels

1. L'ensemble $F_1$ est certainement stable par somme et par produit par une constante (on sait même qu'il est stable par produit matriciel, mais ce n'est pas important pour la question posée ici), et il contient la matrice nulle, c'est donc un sous-espace vectoriel de $E$. Les matrices de $F_1$ sont toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, ce qui prouve immédiatement que $F_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, et que $\dim(F_1) = 3$.
2. Inutile de se fatiguer ici, par définition $F_2 = \text{Vect}(I_2)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $E$.
3. L'ensemble $F_3$ contient la matrice nulle, et il est stable par produit par un réel, mais par contre il n'est sûrement pas stable par somme : par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \notin E$. Il ne s'agit donc pas d'un sous-espace vectoriel.
4. La matrice étant loin d'être inversible, pas la peine d'aller chercher plus loi, $F_4$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $E$. Accessoirement, $F_4$ n'est pas non plus stable par somme, et pas tout à fait pas produit par un réel (il ne faut pas multiplier par 0 !).
5. Celui-ci est bien un sous-espace vectoriel. Plutôt que de vérifier la stabilité, trouvons-en directement une base : les matrices de $F_5$ s'écrivent sous la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ (la seule condition est que la somme des deux coefficients diagonaux soit nulle, donc qu'ils soient opposés), d'où $F_5 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel, de dimension 3.
6. La matrice nulle ne vérifiant pas l'égalité définissant $F_6$, il ne peut pas s'agir d'un sous-espace vectoriel. D'ailleurs, cet ensemble n'est pas non plus stable par produit par un réel ni par somme, on se demande un peu ce qu'il fait là.

## Problème : révisions d'analyse

### Première partie : étude de la fonction $f$.

1. La fonction $f$ est dérivable et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, intervalle sur lequel son dénominateur ne s'annule pas (puisque $e^{-t} + 1 > 0$ et $t > 0$). De plus, $f'(t) = \dfrac{-1 - e^{-t}}{(t + 1 - e^{-t})^2} > 0$, la fonction $f$ est donc strictement décroissante. Enfin, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = +\infty$ (le dénominateur étant strictement positif, il ne peut tendre que vers $0^+$).
2. Il n'y a vraiment pas grand chose de passionnant à tracer :




3. La fonction étant continue strictement monotone, elle est effectivement bijective. Les variations de $f^{-1}$ sont exactement les mêmes que celles de $f$ (théorème de la bijection).
4. (a) On peut écrire $x_n = f^{-1}(n)$. La fonction $f^{-1}$ étant décroissante, $(x_n)$ est une suite décroissante. Étant minorée par 0, elle converge nécessairement. Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ (out ça est vraiment trivial, passons vite !).

   (b) On peut écrire $t + 1 - e^{-t} \underset{t\to 0}{=} t + 1 - (1 - t + o(t)) \sim 2t$, donc $f(t) \sim \dfrac{1}{2t}$.

   (c) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, on en déduit que $f(x_n) \sim \dfrac{1}{2x_n}$, soit $x_n \equiv \dfrac{1}{2f(x_n)} \sim \dfrac{1}{2n}$.

**Deuxième partie : résolution approchée de l'équation $f(x) = 1$.**

1. En effet, si $f(\alpha) = 1$, on a $\alpha + 1 - e^{-\alpha} = 1$, soit $e^{-\alpha} = \alpha$. De plus, $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{e} + 1 - e^{-\frac{1}{e}}} > 1$ puisque $\dfrac{1}{e} - e^{-\frac{1}{e}} < 0$ ; et $f(1) = \dfrac{1}{2 - e^{-1}} < 1$, donc la décroissance de $f$ assure que $\dfrac{1}{e} < \alpha < 1$.
2. La fonction $g$ est décroissante sur $I$ (et sur $\mathbb{R}$ tout entier d'ailleurs), $g(1) = \dfrac{1}{e}$, et $g\left(\dfrac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}} < 1$, donc l'intervalle est bien stable par $g$. De plus, $g'(x) = -e^{-x}$, donc $|g'(x)| = e^{-x} \leq g\left(\dfrac{1}{e}\right)$ sur $I$. La valeur correspondante est inférieure à 1, on l'a déjà dit plus haut !
3. (a) C'est une récurrence triviale : $u_0 \in I$, et par stabilité de l'intervalle, $u_n \in I \Rightarrow u_{n+1} \in I$.

   (b) Commençons par appliquer l'IAF entre $\alpha$ (qui appartient à $I$) et $u_n$ : $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq k|u_n - \alpha|$, soit $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$. Il ne reste plus qu'à faire une petite récurrence : $|u_0 - \alpha| = 1 - \alpha \leq 1$, et en supposant léinagalité vraie au rang $n$, alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha| \leq k \times k^n = k^{n+1}$. C'est bon !

   (c) Puisque $|u_n - \alpha| \geq 0$, une application immédiate du théorème des gendarmes permet de conclure que $(u_n)$ converge, et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

**Troisième partie : étude de la fonction $F$.**

1. Pour que l'intégrale existe, il faut que $x$ et $2x$ soient tous les deux strictement positifs, donc $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}^{+*}$.
2. (a) C'est trivial, il suffit d'utiliser le fait que $0 < e^{-t} < 1$.

   (b) On peut encadrer $F$ de la façon suivante : $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t+1}\,dt \leq F(x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt$, soit $[\ln(t+1)]_x^{2x} \leq F(x) \leq [\ln(t)]_x^{2x}$, donc $\ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq F(x) \leq \ln(2x) - \ln(x)$. Le membre de droite de l'encadrement vaut simplement $\ln(2)$, celui de gauche vaut $\ln\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right) = \ln\left(2 - \dfrac{1}{x+1}\right)$, qui tend vers $\ln(2)$ quand $x$ tend vers $+\infty$. Un petit coup de théorème des gendarmes pour conclure : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ln(2)$.
3. (a) En notant $h$ une primitive quelconque de $f$, on peut écrire $F(x) = h(2x) - h(x)$, soit $F'(x) = 2h'(2x) - h(x) = 2f(2x) - f(x) = \dfrac{2}{2x+1-e^{-2x}} - \dfrac{1}{x+1-e^{-x}}$ $= \dfrac{2x+2-2e^{-x}-2x-1+e^{-2x}}{(x+1-e^{-x})(2x+1-e^{-2x})} = \dfrac{e^{-2x}-2e^{-x}+1}{(x+1-e^{-x})(2x+1-e^{-2x})}$. Coup de chance extraordinaire, le numérateur vaut exactement $(e^{-x}-1)^2$, il est donc toujours positif. Comme le dénominateur l'est aussi, la fonction $F$ est strictement croissante.

   (b) Non, on ne va pas faire un tableau alors qu'on n'a même pas la limite en 0 et qu'il ne se passe rien d'intéressant, ça suffit !
4. (a) Reprenons notre début de calcul d'il y a quelques questions en allant un peu plus loin : au voisinage de 0, $t+1-e^{-t} = t+1-\left(1-t+\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{t^3}{6}+o(t^3)\right) = 2t - \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{6}t^3 + o(t^3) = 2t\left(1 - \dfrac{1}{4}t + \dfrac{1}{12}t^2 + o(t^2)\right)$. On peut alors effectuer un développement asymptotique de l'inverse : $f(t) = \dfrac{1}{2t} \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}t+\frac{1}{12}t^2+o(t^2)} = \dfrac{1}{2t} \times \left(1 + \dfrac{1}{4}t - \dfrac{1}{12}t^2 + \dfrac{1}{16}t^2 + o(t^2)\right) = \dfrac{1}{2t} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{96}t + o(t)$.

   (b) Dire que $h(t) = o(t)$ revient à dire qu'on peut écrire $h(t) = t\alpha(t)$, avec $\displaystyle\lim_{t0} \alpha(t) = 0$. Autrement dit, en revenant à la définition de la limite, si on fixe un $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de 0, donc un intervalle de la forme $I = [-\beta, \beta]$, sur lequel $-\varepsilon \leq \alpha(t) \leq \varepsilon$. Supposons $|x| < \dfrac{\beta}{2}$ (on le prendra même positif pour ne pas renverser les inégalités), on peut alors intégrer l'encadrement précédent entre $x$ et $2x$ pour obtenir $\displaystyle\int_x^{2x} \varepsilon t\,dt \leq \int_x^{2x} h(t)\,dt \leq \int_x^{2x} \varepsilon t\,dt$. Or, $\displaystyle\int_x^{2x} \varepsilon t\,dt = \varepsilon\left[\frac{t^2}{2}\right]_x^{2x} = \varepsilon \times \frac{3x^2}{2}$. On en déduit que $\displaystyle\frac{1}{x^2}\left|\int_x^{2x} h(t)\,dt\right| \leq \frac{3\varepsilon}{2}$ (quitte à être sur le bon voisinage de 0), ce qui suffit à prouver que $\displaystyle\int_x^{2x} h(t)\,dt = o(x^2)$ (le quotient tend nécessairement vers 0 quand $x$ tend vers 0 puisqu'il peut être rendu inférieur à toute constante strictement positive).

   (c) En utilisant la question précédente, on peut très joyeusement intégrer le développement asymptotique de la fonction $f$, pour trouver $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{2t} + \frac{1}{8} - \frac{1}{96}t + o(t)\,dt = \left[\frac{\ln(t)}{2} + \frac{t}{8} - \frac{t^2}{192}\right]_x^{2x} + o(x^2) = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{x}{8} - \frac{x^2}{64} + o(x^2)$.

   (d) Oui, le développement précédent prouve que $\displaystyle\lim_{x\to0} F(x) = \frac{\ln(2)}{2}$. Oui, la fonction est dérivable puisqu'elle admet un développement limité à l'ordre 1 en 0. Oui, la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0, mais attention, on ne peut pas le déduire de l'existence d'un développement limité à l'ordre 2. Il faut appliquer le théorème de prolongement de la dérivée en prouvant que $F'$ est continue en 0. En fait, on sait que $F'(x) = 2f(2x) - f(x)$, on peut en faire un développement en 0 : $2f(2x) - f(x) = \frac{2}{4x} + \frac{2}{8} - \frac{4x}{96} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8} + \frac{1}{96}x + o(x) = \frac{1}{8} - \frac{3x}{96} + o(x)$, ce qui prouve que $F'$ est continue (et même dérivable) en 0.

(e) Il suffit de reprendre le développement limité, la tangente a pour équation $y = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{x}{8}$, et l'écart entre la courbe et la tangente est équivalent à $-\frac{x^2}{64}$, qui est négatif au voisinage de 0. La courbe sera donc localement en-dessous de sa tangente.

5. Il n'y a pas grand chose à indiquer si ce n'est la tangente en 0 :