Devoir Maison n°7

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 9 avril 2015

Exercice : espaces vectoriels

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices à coefficients réelles à 2 lignes et 2 colonnes. Pour chaun des sous-ensembles suivants de E, déterminer s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel et, si c'est le cas, donner sa dimension et en déterminer une base (on essaiera de faire le moins de calcul possible à chaque fois).

1. $F_1 = \{$matrices triangulaires supérieures$\}$.
2. $F_2 = \{$multiples de $I_2\}$.
3. $F_3 = \{$matrices ayant au moins un coefficient nul$\}$.
4. $F_4 = \{$matrices inversibles$\}$.
5. $F_5 = \{M | \operatorname{Tr}(M) = 0\}$ (on rappelle que la trace est la somme des coefficients diagonaux d'une matrice).
6. $F_6 = \{M \mid M^2 - 3M + 2I = 0\}$.

Problème : révisions d'analyse

On désigne dans tout ce problème par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(t) = \dfrac{1}{t+1+e^{-t}}$. On note de plus $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt$ (intégrale qu'on ne cherchera surtout pas à calculer explicitement).

Première partie : étude de la fonction f.

1. Dresser un tableau de variations complet (avec les limites) de la fonction f.
2. Tracer une allure soignée de la courbe représentative de f.
3. Montrer que f effectue une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur lui-même, et donner le tableau de variations de sa réciproque f^{-1}.
4. On désigne pour tout entier naturel n par x_n la solution de l'équation $f(x) = n$.
   (a) Quelle est la monotonie de la suite (x_n) ? Converge-t-elle ? Si oui vers quelle limite ?
   (b) Déterminer un équivalent simple de $f(t)$ lorsque t tend vers 0.
   (c) En déduire un équivalent simple de x_n.

Deuxième partie : résolution approchée de l'équation $f(x) = 1$.

On note dans cette partie α la solution de l'équation $f(x) = 1$ (précédemment notée x_1).

1. Montrer que α est l'unique solution de l'équation $e^{-x} = x$, et prouver que $\dfrac{1}{e} \leq \alpha \leq 1$.
2. On note désormais g la fonction $x \mapsto e^{-x}$, montrer que l'intervalle $I = \left[\dfrac{1}{e}, 1\right]$ est stable par g, et majorer $|g'(x)|$ sur I par un réel $k < 1$.

3. On définit une suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-u_n}$.
   (a) En exploitant les questions précédentes, prouver que, $\forall n \in \mathbb{R}$, $u_n \in I$.
   (b) Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq k^n$.
   (c) En déduire la convergence et la limite de la suite (u_n).

Troisième partie : étude de la fonction F.

On cherche dans cette dernière partie à faire une étude détaillée de la fonction F définie en début d'exercice.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction F.
2. Étude en $+\infty$:
   (a) Montrer que, $\forall t > 0$, $\dfrac{1}{t+1} \leq f(t) \leq \dfrac{1}{t}$.
   (b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.
3. Variations de F :
   (a) Exprimer la dérivée F' de la fonction F en fonction de f.
   (b) En déduire le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. Étude de F au voisinage de 0 :
   (a) Montrer que, au voisinage de 0, on peut écrire $f(t) = \dfrac{a}{t} + b + ct + o(t)$, où a, b et c sont évidemment des réels à déterminer.
   (b) Montrer rigoureusement que si $h(t) \underset{t \to 0}{=} o(t)$, alors $\displaystyle\int_x^{2x} h(t) \underset{x \to 0}{=} o(x^2)$ (question difficile, si vraiment vous n'y arrivez pas rigoureusement, les tentatives de pipeau honteux seront peut-être tolérées).
   (c) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction F.
   (d) La fonction F est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Dérivable en 0 ? De classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0 ?
   (e) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de F en 0, et déterminer la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de 0.
5. Bien évidemment, concluez cette passionante étude par le tracé d'une allure la plus précise possible de la courbe de la fonction F, tenant compte de tous les calculs effectués dans cette partie.