Devoir Maison n°6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

6 mars 2015

Exercice 1

1. La fonction f n'est évidemment pas définie en $x = 0$, mais aussi en $x = -1$, seule valeur à annuler ce qui se trouve dans la valeur absolue. Autrement dit, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1; 0\}$. Comme nous n'aimons par ailleurs pas beaucoup les valeurs absolues, on peut constater que :
   - sur $]0, +\infty[$, $f(x) = x^2(\ln(x+1) - \ln(x))$.
   - sur $]-1, 0[$, $f(x) = x^2(\ln(x+1) - \ln(-x))$.
   - sur $]-\infty, -1[$, $f(x) = x^2(\ln(-x-1) - \ln(-x))$.

   Pour la suite, on va commencer par les calculs de limite, c'est le plus simple. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln(x) = 0$, et de même en 0^-, ce qui permet d'affirmer que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. On peut donc prolonger la fonction f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Par contre, on a (aucune difficulté de calcul) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$, donc il y aura une asymptote verticale à la courbe d'équation $x = -1$. Restent les limites à l'infini. revenons à la forme initiale de la fonction (sans la valeur absolue car on va d'abord regarder ce qui se passe en $+\infty$), et posons $X = \dfrac{1}{x}$, de façon à avoir $f(x) = \dfrac{\ln(1+X)}{X^2} = \dfrac{1}{X} \times \dfrac{\ln(1+X)}{X}$. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, et $\lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$, ce qui implique $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Un calcul extrêmement similaire donne $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Les plus malins auront déjà remarqué que le calcul précédent implique clairement que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. Nous manquons hélas de connaissances pour réussir à prouver que $\underset{x \to \pm\infty}{f}(x) - x = -\dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire que la droite d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $\pm\infty$. Pour les plus curieux, ça se fait en moins d'une ligne avec les développements limités.

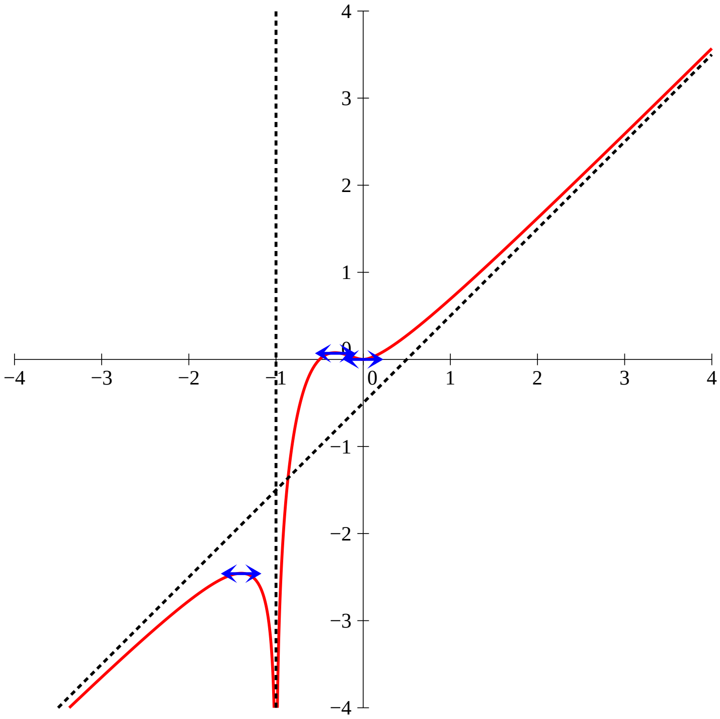
   Faisons une petite pause pour étudier le signe de la fonction f. La fonction est positive lorsque $\left|1 + \dfrac{1}{x}\right| \geq 1$. La fonction f est clairement positive sur $]0, +\infty[$. Sur $]-1, 0[$, il faut étudier le signe de $\dfrac{x+1}{-x} - 1 = \dfrac{2x+1}{-x}$, qui est du signe de $2x+1$ sur l'intervalle considéré. On a donc $f(x) \geq 0$ si $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 0\right]$, et $f(x) \leq 0$ si $x \in \left]-1, -\dfrac{1}{2}\right]$. Sur l'intervalle $]-\infty, -1[$, la fonction f prend des valeurs négatives puisque $0 < 1 + \dfrac{1}{x} < 1$ sur cet intervalle.

   Passons donc aux variations. On va commencer par s'intéresser à ce qui se passe sur $\mathbb{R}^+$. Sur cet intervalle, on a $f'(x) = 2x\ln(x+1) - 2x\ln(x) + \dfrac{x^2}{x+1} - x$, qui est du signe de $h(x) = 2\ln(x+1) - 2\ln(x) + \dfrac{x}{x+1} - 1$. Soyons courageux et dérivons une nouvelle fois (seulement h tout de même, ça suffira) : $h'(x) = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{x+1-x}{(x+1)^2} = \dfrac{2x(x+1) - 2(x+1)^2 + x}{x(x+1)^2} =$

$\dfrac{2x^2+2x-2x^2-4x-2+x}{x(x+1)^2} = \dfrac{-x-2}{x(x+1)^2}$, qui est clairement négatif sur $\mathbb{R}^+$. La fonction h est donc décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ (il suffit de regrouper les ln pour constater que leur différence tend vers 0, et d'utiliser le quotient des termes de plus haut degré pour la fraction). La fonction h est donc toujours positive sur $]0, +\infty[$, et f' également, ce qui prouve la croissance de f sur cet intervalle. Notons en passant que $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$ (un terme nécessite de la croissance comparée, le reste est trivial), ce qui prouve l'existence d'une demi-tangente horizontale pour f en 0 (par théorème de prolongement de la dérivée). Qu'est-ce qui change sur les autres intervalles ? Essentiellement rien, puisque la dérivée de $\ln(-x)$ est la même que celle de $\ln(x)$ (et pareil pour l'autre ln). La dérivée de f est donc toujours du signe de h (en remplaçant évidemment le $\ln(x)$ par $\ln(-x)$ dans la formule, ce qui ne change pas la dérivée). Sur $]-1, 0[$, h est croissante (attention au facteur x du dénominateur qui est devenu négatif !), avec $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = +\infty$ (un seul terme a une limite infinie), et $\lim\limits_{x\to -1^+} h(x) = -\infty$. Ah mince, cette dernière limite est difficile à calculer, alors trichons en nous contentant de calculer $h\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1-1 = -2$ (les ln s'annulent). La fonction h prend donc des valeurs négatives sur $]-1, 0[$, et elle s'annule forcément une fois sur l'intervalle, en un réel qu'on notera α, et qui vérifie donc $\alpha > -\dfrac{1}{2}$. Nous n'avons aucune façon de déterminer précisément la valeur de α, l'utilisation de méthodes numériques donne $\alpha \simeq -0.32$, et $f(\alpha) \simeq 0.08$. Attention tout de même, sur cet intervalle f' est du signe opposé à celui de h, la fonction f est donc croissante sur $]-1, \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha, 0[$. Remarquons en passant que notre demi-tangente horizontale en 0 est en fait une tangente complète, la limite en 0^- étant toujours nulle pour f'. Sur l'intervalle $]-\infty, -1[$, c'est un peu plus intéressant puisque la fonction h (avec encore quelques changements de signe dans les ln est décroissante sur $]-\infty, -2]$ puis croissante sur $[-2, -1[$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$ (même calcul que pour la limite en $+\infty$), et $\lim\limits_{x\to -1^-} h(x) = +\infty$, il y a une nouvelle valeur d'annulation, notée β, de la dérivée de f. Là encore, pas d'autre choix que des méthodes numériques pour obtenir $\beta \simeq -1.40$ et $f(\beta) \simeq -2.46$. La fonction f sera croissante sur $]-\infty, \beta]$ et décroissante sur $[\beta, -1[$. On peut résumer tout ceci dans un beau tableau de variations :

x	$-\infty$		β		-1		α		0		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Il ne reste plus maintenant qu'à tracer la courbe représentative de la fonction f :

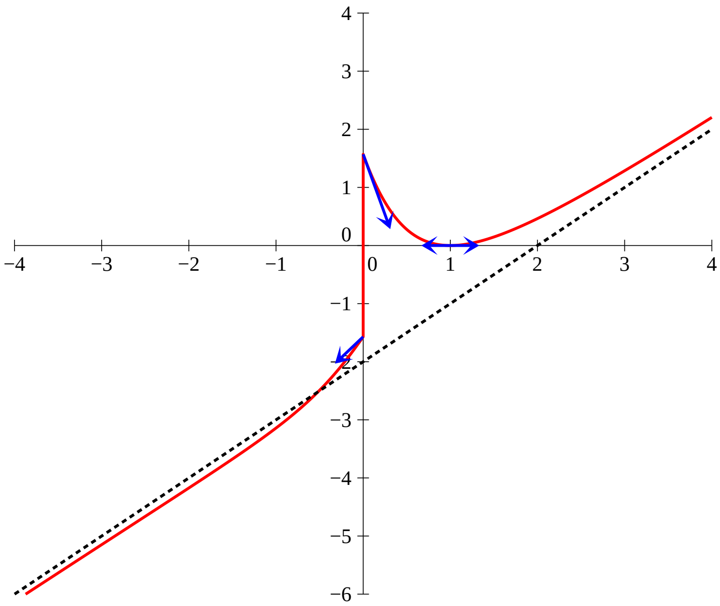


2. La fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^*$. Commençons à nouveau par les limites. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \arctan(x) = \pm\dfrac{\pi}{2}$, on obtient facilement $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \dfrac{\pi}{2}$. Pas vraiment de prolongement par continuité possible en 0, donc, mais tout de même des limites finies à gauche et à droite, on essaiera évidemment de déterminer les demi-tangentes correspondantes. En $\pm\infty$, c'est plus compliqué puisqu'on a une belle forme indéterminée. On va exploiter le fait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x)}{x} = \arctan'(0) = 1$ (on a une limite de taux d'accroissement). On peut écrire $g(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x} \times \dfrac{\arctan(X)}{X}$, en posant $X = \dfrac{1}{x}$. Le deuxième quotient tend vers 1 vers $\pm\infty$, et le premier a une limite qui s'obtient facilement par comparaison des termes de plus haut degré : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Le même raisonnement permet d'obtenir $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 1$ (on aura simplement un x^2 au lieu du x au dénominateur). Encore une fois, on ne dispose pas de toutes les techniques nécessaires (calculs de développements limités) pour prouver rigoureusement que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) - x = -2$, mais les plus curieux feront le calcul en remplaçant brutalement le arctan $\left(\dfrac{1}{x}\right)$ par $\dfrac{1}{x}$ et constateront que ça marche. En tout cas, la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à la courbe. Notons en passant que le signe de g est le même que celui de l'arctangente dans son expression, donc $g(x)$ est du signe de x, et s'annule lorsque $x = 1$.

   Passons aux variations : $g'(x) = 2(x-1)\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) + (x-1)^2 \times \dfrac{-1}{x^2}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 2(x-1)\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2} = (x-1)u(x)$, en posant $u(x) = 2\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1-x}{1+x^2}$. Allez, redérivons u pour étudier son signe : $u'(x) = \dfrac{-2}{1+x^2} + \dfrac{-1-x^2-2x+2x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-2-2x^2-1-2x+x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-3-2x-x^2}{(1+x^2)^2}$. Le trinôme x^2+2x+3 est toujours positif (son discriminant est négatif), la fonction u est donc décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x) = 0$ (calcul facile), la fonction u est négative sur $]-\infty, 0[$ et positive sur $]0, +\infty[$. On en déduit les variations de g : elle est croissante sur $]-\infty, 0[$ (puisque $x-1$ y est négatif), décroissante sur $]0, 1]$ et à nouveau croissante ensuite. Profitons-en pour donner les limites de la dérivée en 0 (aucune forme indéterminée pour le calcul) : $\lim\limits_{x\to 0^-} g'(x) = \pi - 1$, et $\lim\limits_{x\to 0^+} -\pi - 1$, ce qui donne les pentes de deux demi-tangentes à la courbe en 0. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

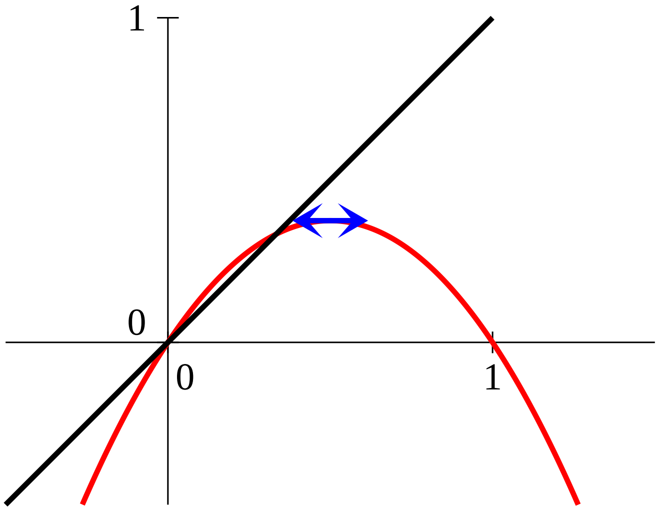
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
g	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{2}$ ‖ $\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On conclut avec le tracé de la courbe :



Exercice 2

Commençons par étudier le cas où $u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n(1-u_n)$, en posant $f(x) = \dfrac{3}{2}x(1-x) = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}x^2$. La fonction f a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{3}{2} - 3x$, elle s'annule pour $x = \dfrac{1}{2}$. La fonction f est croissante sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$, décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, admettant comme maximum $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$. Tant qu'on y est, déterminons le signe de $f(x) - x$ (et les points fixes de f par la même occasion) : $f(x) - x = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}x^2 = \dfrac{1}{2}x(1-3x)$. Les deux points fixes de la fonction sont atteints pour $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{3}$, et $f(x) - x \geq 0$ sur $\left[0, \dfrac{1}{3}\right]$ (tout le reste du temps, $f(x) - x \leq 0$). Allez hop, il est temps de faire une belle figure (on a surtout indiqué ce qui se passe sur $[0, 1]$, c'est là que se concentrent les points intéressants) :



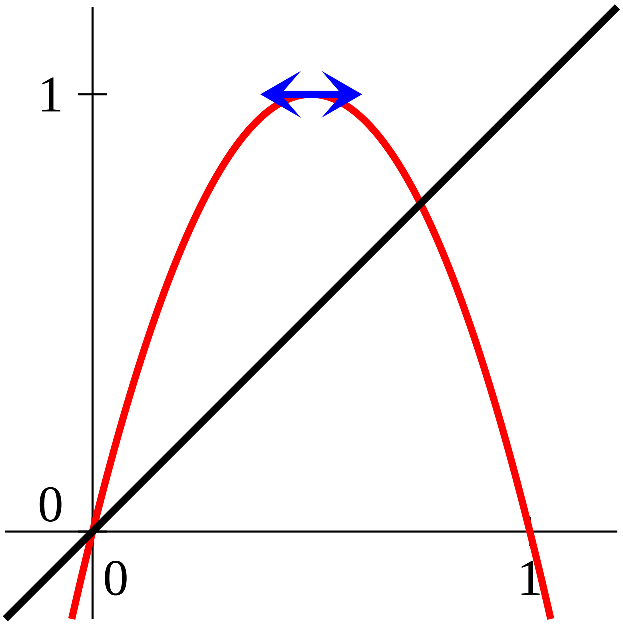
On peut distinguer plusieurs intervalles intéressants : $]-\infty,0]$ qui sera un intervalle stable dans lequel la suite récurrente sera décroissante, $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ qui sera aussi stable, $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, et $[1,+\infty[$ (qui ne sont pas stables, mais seront facilement gérés une fois qu'on aura fait le reste). Avant même de distinguer les cas pour u_0, on peut bien sûr tracer les premiers termes pour certaines valeurs de u_0 (par exemple une valeur négative, et une valeur entre 0 et $\dfrac{1}{2}$), ou bien, si on est plus savants, calculer la valeur de la dérivée aux points fixes pour voir s'ils sont attractifs ou répulsifs. En l'occurrence, $f'(0)=\dfrac{3}{2}$, qui est supérieur à 1, le point fixe 0 sera répulsif ; et $f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$, ce deuxième point fixe sera attractif. Allons-y pour la distinction de cas :

- Deux cas très particuliers : si $u_0=0$, la suite est constante nulle, elle converge bien sûr vers 0. Si $u_0=1$, on aura $u_1=0$, et la suite sera donc stationnaire égale à 0 à partir du rang 1, et convergera vers 0. Ce sont en fait les deux seules valeurs de u_0 pour lesquelles la suite converge vers 0. Il existe deux autres suites constantes ou stationnaires : pour $u_0=\dfrac{1}{3}$ (constante) et pour $u_0=\dfrac{2}{3}$ (stationnaire à partir du rang 1) mais on peut les intégrer dans les cas suivants sans problème.
- Cas où $u_0<0$. La fonction f étant bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur lui-même, l'intervalle $]-\infty,0[$ est bien stable par f. On peut alors prouver par récurrence triviale que toutes les valeurs de u_n sont strictement négatives (c'est tellement trivial que je ne la rédige pas, na !). Comme $f(x)-x<0$ sur l'intervalle considéré, on aura toujours $u_{n+1}-u_n<0$, la suite est donc décroissante. Elle ne peut converger puisque le seul point fixe de l'intervalle, 0, ne peut pas être atteint par une suite décroissante de premier terme strictement négatif. La suite n'est donc pas minorée, et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$. Appliquer l'IAF n'aurait ici aucun intérêt, si ce n'est de mesurer à quelle vitesse on s'éloigne du point fixe 0 (en minorant la valeur absolue de f' au lieu de la majorer).
- Cas où $u_0>1$. On saute tout de suite au dernier cas, qui se ramène très rapidement au précédent. En effet, si $u_0>1$, on aura $u_1<0$, et à partir du rang 1, la suite est donc strictement décroissante et diverge vers $-\infty$. Ah ben, à partir du rang 0 aussi, du coup.
- Cas où $0<u_0\leq\dfrac{1}{2}$. L'intervalle $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ est stable par f puisque celle-ci est croissante sur l'intervalle, avec $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{8}<\dfrac{1}{2}$. On démontre alors par récurrence que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\in\left]0,\dfrac{1}{2}\right]$: c'est vrai pour u_0 par hypothèse, et si u_n est dans cet intervalle, $f(u_n)=u_{n+1}$ aussi, ce qui

prouve l'hérédité. La fonction f étant croissante sur l'intervalle, (u_n) sera monotone. En fait, on aurait pu séparer les deux intervalles $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, où (u_n) sera croissante, et $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, où elle sera décroissante (ces deux intervalles sont stables par f). On peut aussi le prouver directement par récurrence. Si $u_0 \leq \frac{1}{3}$ par exemple, on aura $u_1 \geq u_0$ (puisque $f(x) - x \geq 0$ sur notre intervalle). Supposons alors $u_n \leq u_{n+1}$, par croissance de f sur notre intervalle stable, on aura $u_{n+1} \leq u_{n+2}$, ce qui prouve l'hérédité de la propriété « $u_n \leq u_{n+1}$ », et prouve la croissance de f. Qu'elle soit croissante ou décroissante, la suite (u_n) est monotone et bornée, elle converge donc. Le seul point fixe atteignable étant $\frac{1}{3}$, on aura toujours $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}$. Tant qu'on y est, on peut essayer d'appliquer l'IAF pour mesurer la vitesse de convergence. On est toutefois confronté à un léger problème, la dérivée prend des valeurs trop grandes quand on est près de 0 pour que la majoration soit efficace. Pour que ce soit utile, il faut restreindre. On se place par exemple sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, intervalle sur lequel $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$. On en déduit que, si $\frac{1}{4} \leq u_0 \leq \frac{1}{2}$ (inégalité qui sera vérifiée par tous les termes suivants de la suite vu sa monotonie et sa limite), on aura $\left|u_{n+1} - \frac{1}{3}\right| \leq \frac{3}{4}\left|u_n - \frac{1}{3}\right|$ (le réel $\frac{1}{3}$ est aussi dans l'intervalle où on a majoré la dérivée). Par une récurrence très classique (que je ne fais donc pas), on obtient $\left|u_n - \frac{1}{3}\right| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \left|u_0 - \frac{1}{3}\right|$. Bon, en fait, ce n'est pas très intéressant, passons au cas suivant.

- Cas où $\frac{1}{2} < u_0 < 1$. En fait, ça va aller très vite : dans ce cas, $u_1 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et on est ramenés au cas précédent. Plus précisément, la suite sera décroissante si $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq \frac{2}{3}$, et deviendra croissante à partir du rang 1 si $\frac{2}{3} \leq u_0 < 1$. Comme on l'a déjà signalé, la suite est stationnaire si $u_0 = \frac{2}{3}$.

On pourrait penser naïvement que le deuxième cas proposé sera très similaire. En fait, pas tant que ça. Posons donc dans ce cas $g(x) = 4x(1-x) = 4x - 4x^2$. La dérivée $g'(x) = 4 - 8x$ s'annule pour $x = \frac{1}{2}$, et g admet un maximum de valeur $g\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ (les variations sont les mêmes que pour f). On calcule sans problème $g(x) - x = 3x - 4x^2 = x(3-4x)$, les deux points fixes sont donc $x = 0$ et $x = \frac{3}{4}$ (mêmes signes que pour $f(x) - x$ ensuite). On a toujours $g(1) = 0$, et on peut donc a priori faire les mêmes cas que précédemment :



- si $u_0 < 0$, même raisonnement que ci-dessus, la suite diverge vers $-\infty$.
- si $u_0 > 1$, toujours pareil, on diverge à nouveau vers $-\infty$.
- si $u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$, la suite reste constante ou stationnaire.
- l'intervalle $[0, 1]$ est stable. C'est plutôt une bonne nouvelle, mais ce qui l'est moins, c'est que la suite ne sera pas monotone ! En fait, si on regarde ce qui se passe pour quelques valeurs de u_0, c'est même carrément le bordel (en termes plus techniques, on dit que notre suite récurrente a un comportement chaotique). Déterminons par exemple quelles sont les valeurs pour lesquelles la suite est stationnaire égale à $\frac{3}{4}$. C'est évidemment le cas si $u_0 = \frac{3}{4}$, mais aussi si $u_1 = \frac{3}{4}$, ce qui se produit lorsque $f(u_0) = \frac{3}{4}$. On résout donc l'équation $4x^2 - 4x + \frac{3}{4} = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet pour racines $x_1 = \frac{4+2}{8} = \frac{3}{4}$ et $x_2 = \frac{4-2}{8} = \frac{1}{4}$. Ah ben oui, en fait on savait déjà que $\frac{3}{4}$ allait être racine, on pouvait trouver l'autre à coup de relations coefficients-racines. Bref, $u_0 = \frac{1}{4}$ donne une suite stationnaire au rang 1. Et pour une suite stationnaire au rang 2 ? On cherche les antécédents par f de $\frac{1}{4}$, pardi ! On résout donc l'équation $4x^2 - 4x + \frac{1}{4} = 0$, discriminant $\Delta = 16 - 4 = 12$, et racines $x_3 = \frac{4+2\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$, et $x_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$. Bien sûr, cela ne s'arrête pas là, on peut chercher les antécédents de x_3 et x_4 (il y en a deux à chaque fois), puis les antécédents de ces antécédents et ainsi de suite. en fait, on peut donner des formules pour les solutions de l'équation $f(x) = y$, lorsque $y \in [0, 1]$, et décrire tous les nombres obtenus par une sorte de suite récurrente (pas exactement, puisqu'une seule valeur donne à chaque fois deux valeurs possibles à l'étape suivante), c'est assez compliqué. si on était très savants, on arriverait à prouver qu'il existe des valeurs de u_0 pour lesquelles la suite sera stationnaire dans tout intervalle inclus dans $[0, 1]$, aussi petit soit-il. Ce serait relativement anecdotique si la suite convergeait quand même vers $\frac{3}{4}$ le reste du temps, mais ce

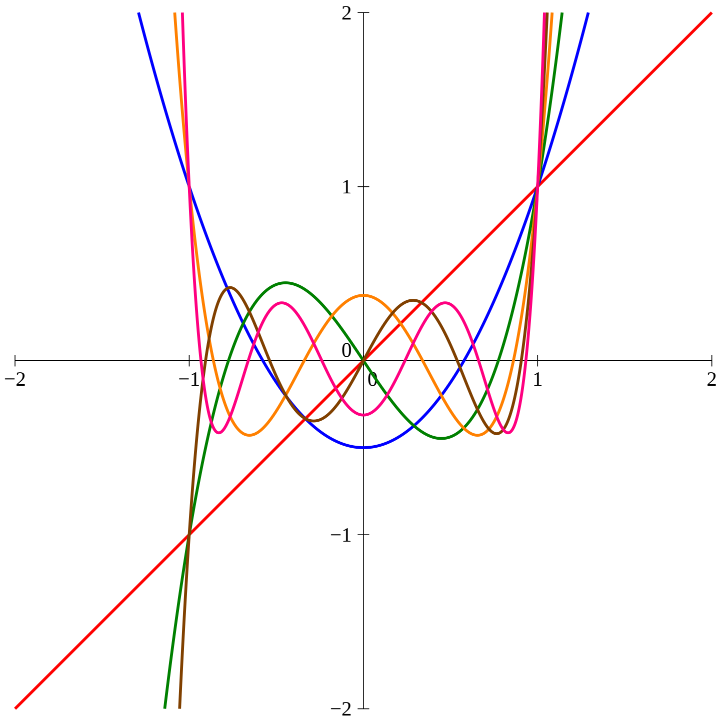
n'est pas du tout le cas : on peut déjà constater que $g'\left(\frac{3}{4}\right) = -2$, ce qui fait de $\frac{3}{4}$ un point fixe répulsif. En fait, on peut prouver que seules les suites stationnaires convergent vers $\frac{3}{4}$ en utilisant subtilement l'IAF : on peut trouver un intervalle autour de $\frac{3}{4}$ dans lequel $|f'(x)| > \frac{3}{2}$ (par exemple), si la suite convergeait vers $\frac{3}{4}$, tous les termes de la suite devraient finir par se trouver dans un tel intervalle, mais l'IAF assurerait alors que $\left|u_{n+1} - \frac{3}{4}\right| > \frac{3}{2}\left|u_n - \frac{3}{4}\right|$, et les termes s'éloigneraient donc de la limite, jusqu'à sortir de l'intervalle, ce qui est complètement contradictoire. Les suites ne peuvent pas converger non plus vers 0 (même argument), elles n'ont pas de limite et se contentent de se ballader dans $[0, 1]$ de façon plus ou moins aléatoire. On peut bien sûr tenter des simulations numériques pour voir ce qui se passe mais il faut se méfier, au bout d'un certain temps, le manque de précision dans les calculs peut donner une idée fausse du comportement de la suite. En particulier, on peut toujours trouver des termes de la suite se rapprochant autant qu'on veut de 0 et de $\frac{3}{4}$ (sans les atteindre, bien entendu).

Exercice 3

Commençons par la partie facile, le calcul des premiers polynômes de la suite :

- $2P_2 = 3XP_1 - P_0 = 3X^2 - 1$, donc $P_2 = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}$.
- $3P_3 = 5XP_2 - 2P_1 = \frac{15}{2}X^3 - \frac{5}{2}X - 2X$, donc $P_3 = \frac{5}{2}X^3 - \frac{3}{2}X$.
- $4P_4 = 7XP_3 - 3P_2 = \frac{35}{2}X^4 - \frac{21}{2}X^2 - \frac{9}{2}X^2 + \frac{3}{2}$, donc $P_4 = \frac{35}{8}X^4 - \frac{15}{4}X^2 + \frac{3}{8}$.
- $5P_5 = 9XP_4 - 4P_3 = \frac{315}{8}X^5 - \frac{135}{4}X^3 + \frac{27}{8}X - 10X^3 + 6X$, donc $P_5 = \frac{63}{8}X^5 - \frac{35}{4}X^3 + \frac{15}{8}X$.
- $6P_6 = 11XP_5 - 5P_4 = \frac{693}{8}X^6 - \frac{385}{4}X^4 + \frac{165}{8}X^2 - \frac{175}{8}X^4 + \frac{75}{4}X^2 - \frac{15}{8}$, donc $P_6 = \frac{231}{16}X^6 - \frac{315}{16}X^4 + \frac{105}{16}X^2 - \frac{5}{16}$.

Bon, on va peut-être s'arrêter là, donnons quand même pour passer le temps une représentation graphique de ces six premiers polynômes (P_1 en rouge, P_2 en bleu, P_3 en vert, P_4 en orange, P_5 en marron et P_6 en rose) :



Nous allons maintenant passer aux différentes propriétés à démontrer, mais là, j'ai une mauvaise nouvelle pour vous : en fait, elles sont vraiment difficiles à démontrer, et pour la plupart je n'ai pas trouvé de moyen élémentaire (oui, je sais, vous êtes très déçus). En particulier, les récurrences élémentaires (même doubles) ne marchent pas du tout, et il faut vraiment faire des intégrations compliquées et utiliser d'autres choses techniques pour s'en sortir. Un seul élément facile à prouver, le passage de la formule 2 à la formule 3 via la formule de Leibniz : on pose $g_n(x) = (x-1)^n(x-1)^n$, et on exprime les dérivées successives de chaque morceau : en posant $h_n(x) = (x-1)^n$, on aura $h'(x) = n(x-1)^{n-1}$, $h''(x) = n(n-1)(x-1)^{n-2}$; puis plus généralement $h^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{k!}(x-1)^{n-k}$. De même pour $u(x) = (1+x)^n$, on aura $u^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{k!}(1+x)^{n-k}$. Leibniz nous donne alors $g^{(n)}(x) = (h(x)u(x))^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^{(k)}(x)u^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{k!}\frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k}(x+1)^k = n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(x-1)^k(x+1)^{n-k}$ (la permutation des puissances ne pose pas de problème, la formule étant symétrique quand on remplace k par $n-k$). Il ne reste plus qu'à diviser par $2^n n!$ pour trouver la formule demandée. Pour le reste, je crois qu'il vaut mieux attendre que j'essaye de vous pondre quelque chose de compréhensible à la fin de l'année !