# Devoir Maison n°6

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 6 mars 2015

Vous aviez apprécié le DM2 avec ses énoncés d'exercices très courts ? Vous allez adorer celui-ci !

## Exercice 1

Étudier le plus complètement possible chacune des fonctions suivantes (domaine de définition, limites, variations, asymptotes, et on fera naturellement une belle courbe pour conclure l'étude) :

1. $f(x) = x^2 \ln \left|1 + \dfrac{1}{x}\right|$.
2. $g(x) = (x-1)^2 \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

## Exercice 2

On considère une suite $(u_n)$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n(1-u_n)$. Déterminer la nature de la suite (on distinguera des cas si besoin en fonction de la valeur de $u_0$). Naturellement, on démontrera tout ce qu'on peut et on essaiera d'en dire le plus possible. Ensuite, si vous êtes courageux, faites la même étude pour la relation $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$.

## Exercice 3

On définit une suite de polynomes $P_n$ de la façon suivante : $P_0 = 1$, $P_1 = X$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)P_{n+1} = (2n+1)XP_n - nP_{n-1}$. Calculer les premiers polynomes de la suite (cinq ou six devraient suffire), puis démontrer sur les propriétés suivantes :

1. En posant $f(x) = (1-x^2)P_n'(x)$, on a la relation $f'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$.
2. En posant $g(x) = (x^2-1)^n$, $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}g^{(n)}(x)$.
3. $P_n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k$.
4. $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0$ si $m \neq n$.