Devoir Maison n°5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

6 février 2015

Exercice 1 : dénombrement

1. Prenons par exemple l'application f suivante : $f(1) = 3$, $f(2) = 5$, $f(3) = 1$, $f(4) = 4$ et $f(5) = 2$, il s'agit d'une involution (on vérifie aisément que $f \circ f = \mathrm{id}$), avec un point fixe. On ne peut pas trouver d'involution sans point fixe de E : par définition, $f(1) = k \neq 1$, et pour que f soit une involution, on doit avoir $f(k) = 1$. On choisit ensuite $f(2)$ (si $k \neq 2$, sinon on passe à 3), qui est lui-même envoyé sur 2, et il reste un élément de l'ensemble qui doit être envoyé sur lui-même. En fait, plus généralement, on aura toujours $S_n = 0$ lorsque n est un entier impair.
2. Si E contient un seul élément, il existe une seule involution (avec un point fixe), l'identité elle-même. Lorsque 2 contient deux éléments, il y en a deux (soit on ne bouge rien, soit on échange les deux éléments), dont une a un point fixe. Avec trois éléments, il y a quatre involutions qui ont toutes un point fixe : l'identité, l'application échangeant 1 et 2 (en laissant 3 fixe), celle échangeant 1 et 3, et enfin celle échangeant 2 et 3. Filament, $T_1 = 1$, $T_2 = 2$ et $T_3 = 4$; $S_1 = S_3 = 0$ et $S_2 = 1$.
3. L'inégalité $S_n \leq T_n$ est triviale puisqu'une involution sans point fixe est un cas particulier d'involution. La deuxième l'est à peine moins puisque toute involution est nécessairement bijective (par définition, une involution est sa propre réciproque) et qu'il y a au total $n!$ bijections sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.
4. (a) Si on impose $f(1) = k$ (avec bien sûr $k \neq 1$), on doit avoir $f(k) = 1$. Il ne reste plus qu'à choisir les images des n éléments restants de E de façon à ce que la restriction de f à ces n éléments soit une involution sans point fixe, ce qui donne S_n possibilités. Reste à compter le nombre de valeurs de k possibles : il y en a $n + 1$, d'où $S_{n+2} = (n + 1)S_n$.
   (b) Pour construire une involution (avec points fixes autorisés), on procède comme précédemment : soit on choisit $f(1) = k \neq 1$, ce qui impose $f(k) = 1$, et on choisit une involution (avec points fixes) des n entiers restants, ce qui laisse donc $(n + 1)T_n$ possibilités ; soit on choisit $f(1) = 1$, et il ne reste qu'à choisit une involution des $n+1$ entiers restants, ce qui fait T_{n+1} possibilités. On en déduit donc que $T_{n+2} = T_{n+1} + (n + 1)T_n$.
5. On sait déjà que $S_{2n-1} = 0$ pour tout entier naturel n. De plus, la relation $S_{2n} = (2n-1)S_{2n-2}$ combinée à la condition initiale $S_2 = 1$ implique que $S_{2n} = \prod_{k=1}^{n}(2k - 1)$ (on peut faire une récurrence si on tient vraiment à être rigoureux). On peut écrire ça plus joliment : $S_{2n} = \prod_{k=1}^{n}(2k - 1) = \dfrac{(2n)!}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.
6. L'égalité des deux sommes est une conséquence immédiate de symétrie des coefficients binomiaux (on remplace k par $n-k$ pour passer d'une somme à l'autre). Comme on ne voit vraiment pas d'où peut sortir cette formule, on va procéder par récurrence double : pour $n = 1$, $T_1 = 1$

et $\displaystyle\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}S_k = S_0+S_1 = 1$ (si vous n'êtes pas convaincu par le fait que $S_0 = 1$, réfléchissez-y mieux : il y a une involution de l'ensemble vide vers lui-même, qui consiste à ne rien faire, et cette involution n'a pas de point fixe puisqu'il n'y a pas d'éléments dans l'ensemble ! Sinon, on peut se contenter de constater que la formule obtenue pour S_{2n} donne bien $S_0 = 1$). La formule est donc vraie au rang 1. Vérifions au rang 2 : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}S_k = S_0+2S_1+S_2 = 2 = T_2$, ça marche.

Passsons à l'hérédité : $T_{n+2} = T_{n+1}+(n+1)T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}S_k+(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_k$. On utilise le fait que $(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$ (formule sans nom) pour obtenir $T_{n+2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}S_k+\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n+1}{k+1}S_k = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}S_k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_{k+2}$ en exploitant la relation de récurrence sur la suite (S_n). On regroupe le tout : $T_{n+2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}S_k+\sum_{k=2}^{n+2}\binom{n+1}{k-1}S_k = S_0+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+2}{k}S_k+S_{n+2} = \sum_{k=0}^{n+2}\binom{n+2}{k}S_k$, ce qui prouve la propriété au rang $n+2$ (on a exploité la relation de Pascal pour la fin du calcul, et isolé les termes extrêmes des deux sommes, en utilisant en passant que $S_1 = 0$).

En reprenant la formule trouvée pour S_{2n}, on peut donc écrire, $T_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\times\frac{(2k)!}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{2^k k!(2n-2k)!}$. De même pour les entiers impairs, $T_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n+1)!}{2^k k!(2n+1-2k)!}$. On ne peut pas vraiment obtenir de formule plus simple. On peut donc calculer $T_{10} = \displaystyle\sum_{k=0}^{5}\frac{10!}{2^k k!(10-2k)!} = \frac{10!}{10!}+\frac{10!}{2\times 8!}+\frac{10!}{4\times 2\times 6!}+\frac{10!}{8\times 6\times 4!}+\frac{10!}{16\times 24\times 2}+\frac{10!}{32\times 120} = 9\ 496$. Par rapport à $10! = 3\ 628\ 800$, on constate que seule une petite proportion des bijections sont des involutions (un peu moins de 0.3%).

Exercice 2 : suites et matrices

I. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

1. Il s'agit d'un calcul classique de suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique $x^2 = x+2$ admet pour racines évidentes -1 et 2 (on a bien entendu le droit de calculer son petit discriminant si on le souhaite). On en déduit que $u_n = A(-1)^n+B\times 2^n$, avec $u_0 = 1 = A+B$, et $u_1 = 5 = -A+2B$. En additionnant les deux équations, $3B = 6$, soit $B = 2$, puis $A = -1$, donc $u_n = 2^{n+1}+(-1)^{n+1}$.
2. Si on note a, b, c et d les coefficients de la matrice A, on cherche donc à avoir les relations $u_{n+1} = au_n+bu_{n+1}$, et $u_{n+2} = cu_n+du_{n+1}$. Il suffit donc de prendre $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
3. C'est une récurrence triviale : pour $n = 0$, on a évidemment $X_0 = A^0X_0$, et en supposant la relation vérifiée au rang n, alors $X_{n+1} = AX_n = A\times A^nX_0 = A^{n+1}X_0$, ce qui prouve l'hérédité.
4. L'égalité $AC = -C$ se traduit par le système constitué des deux équations $\alpha = -1$ et $2+\alpha = -\alpha$, qui donnent toutes les deux $\alpha = -1$. De même, la condition $AC' = 2C'$ se traduit par les

équations $\beta = 2$ et $2 + \beta = 2\beta$, qui donnent $\beta = 2$.

5. On note donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, je vais passer par la méthode du système pour inverser la matrice : un système donc la matrice est P est constitué des équations $x+y = a$ et $-x+2y = b$. En addition, on obtient donc $y = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b$, puis $x = a - y = \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b$. La matrice P est donc inversible, d'inverse $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
6. La relation $D = P^{-1}AP$ revient à dire que $AP = PD$. Or, si on regarde colonne par colonne, la matrice AP est constituée des mêmes colonnes que P, multipliées recpectivement par -1 et par 2 (c'est même ainsi qu'on a obtenu P). La matrice PD doit vérifier la même propriété, ce qui sera le cas en prenant $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (multiplier à droite par une matrice diagonale revient à multiplier les colonnes de la matrice par les coefficients de la matrice diagonale).
La deuxième partie de la question est une récurrence hyper classique : c'est vrai au rang 0 puisque $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I$, et en supposant la relation vérifiée au rang n, alors $A^{n+1} = A \times A^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, ce qui prouve l'hérédité.
7. On a bien entendu $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$, puis $PD^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^n \\ (-1)^{n+1} & 2^{n+1} \end{pmatrix}$, et enfin $A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & 2^n - (-1)^n \\ 2(-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 2^{n+1} - (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$.
Puisqu'on sait que $X_n = A^nX_0$, on en déduit directement (en regardant uniquement le premier coefficient de la matrice X_n), que $u_n = \frac{1}{3}((2^n + 2(-1)^n)u_0 + (2^n - (-1)^n)u_1)$. Si on préfère, on regroupe suivant les puissances : $u_n = \dfrac{2^n(u_0 + u_1) + (-1)^n(2u_0 - u_1)}{3}$.
8. Dans tous les cas, le terme général de la suite s'écrira sous la forme $u_n = A2^n + B(-1)^n$, ce qui prouve le théorème sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 vu en cours (du moins dans ce cas particulier). Réciproquement, il est facile de vérifier que toute suite de cette forme vérifie la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$: $A2^{n+1} + B(-1)^{n+1} + 2(A2^n + B(-1)^n) = 2^{n+2}A + B(-1)^n = 2^{n+2}A + B(-1)^{n+2}$.

II. Un exemple d'ordre 3.

1. C'est le même principe que ci-dessus, on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 45 & -39 & 11 \end{pmatrix}$. La récurrence étant vraiment rigoureusement la même, on s'en passera.
2. Oh, du calcul passionnant : $A-3I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 45 & -39 & 8 \end{pmatrix}$, puis $(A-3I)^2 = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 1 \\ 45 & -30 & 5 \\ 225 & -150 & 25 \end{pmatrix}$, et, incroyable mais vrai, quand on multiplie cette matrice par $A - 5I = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 45 & -39 & 6 \end{pmatrix}$, on obtient la matrice nulle (les plus observateurs ne feront les vérifications que sur une seule ligne, puisque les trois lignes de $(A - 3I)^2$ sont toutes proportionnelles) !
Si on développe tout brutalement, on a donc $(A^2 - 6A + 9I)(A - 5I) = 0$, soit $A^3 - 11A^2 + 39A - 45I = 0$ (tiens, j'ai déjà vu ces coefficients quelque part, c'est étonnant), donc $A(A^2 - 11A + 39I) = 45I$. La matrice A est donc inversible, d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{45}(A^2 - 11A + 39I)$. Les plus courageux vérifieront sans trop de problèmes que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 45 & -39 & 11 \\ 495 & -384 & 82 \end{pmatrix}$, puis que

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{13}{15} & -\frac{11}{45} & \frac{1}{45} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Étonnant, non ?

3. Comme dans la première partie, on ramène les calculs à des résolutions de systèmes assez élémentaires. La condition $AC_1 = 5C_1$ donne les équations $a = 5$, $b = 5a$ et $45 - 39a + 11b = 5b$, ce qui donne commu unique solution $a = 5$ et $b = 25$ (il suffit en gros de vérifier que la dernière équation est vraie). De même, pour $AC_2 = 3C_2$, on a $c = 3$, $d = 3c$ et $45 - 39c + 11d = 3d$, ce qui fonctionne bien avec $c = 3$ et $d = 9$. Enfin, dernière condition, $AC_3 = C_2 + 3C_3$ donne $e = 4$, $f = c + 3e = 3 + 3e$, et $45 - 39e + 11f = d + 3f = 9 + 3f$. On obtient cette fois $e = 4$, $f = 15$, et la dernière équation est bien vérifiée.

4. On définit donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \\ 25 & 9 & 15 \end{pmatrix}$. Pour inverser la matrice, on utilise sa méthode préférée, par exemple un bon vieux pivot de Gauss bien sale :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \\ 25 & 9 & 15 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 25L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -16 & -10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ -25 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 15 & -8 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 17 & -8 & 1 \\ -25 & 10 & -1 \\ 15 & -8 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 9 & -6 & 1 \\ -25 & 10 & -1 \\ 15 & -8 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/4 \\ L_2 \leftarrow -L_2/4 \\ L_3 \leftarrow -L_3/2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{25}{4} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{15}{2} & 4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice P est donc inversible, et $P^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 & -6 & 1 \\ 25 & -10 & 1 \\ -30 & 16 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Commençons par calculer $AP = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 25 & 9 & 15 \\ 125 & 27 & 54 \end{pmatrix}$, puis $T = P^{-1}AP = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$, soit $T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Les plus malins se demanderont comment deviner cela directement à partir de la définition des colonnes de la matrice P.

   La récurrence pour la formule donnant A^n est rigoureusement la même que dans la première partie, on s'en dispensera.

Pour vérifier si ça marche pour $n = -1$, il faut connaitre $T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ (pivot trivial à une seule étape si on y tient vraiment !). On calcule ensuite $PT^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, puis $PT^{-1}P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \frac{52}{15} & -\frac{44}{45} & \dfrac{4}{45} \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Incroyable, cette matrice coïncide exactement avec A^{-1}, la formule reste donc vraie ! En fait, pas besoin d'être maso et de pousser les calculs jusqu'au bout, savoir que T est inversible suffit : comme $T = P^{-1}AP$ (produit de matrices inversibles), on peut alors écrire $T^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$ (on retourne l'ordre des inverses dans le produit), exactement la formule souhaitée.

6. On pose donc $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie sans aucun problème que $N^2 = 0$ (et les puissances de N suivantes sont donc également nulles), et $DN = ND$. On peut donc appliquer la formule du pivot de Gauss, en arrêtant la somme très rapidement : $T^n = (N+D)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = D^n + nND^{n-1}$, soit $T^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n \times 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

7. Il ne reste plus qu'à calculer $A^n = PT^nP^{-1}$. En fait, seule la première ligne de A^n est nécessaire, puisqu'on obtiendra X_n en multipliant A^n par X_0, et seule la première coordonnée de X_n nous intéresse. On calcule donc $PT^n = \begin{pmatrix} 5^n & 3^n & (n+3)3^{n-1} \\ 5^{n+1} & 3^{n+1} & (n+4)3^n \\ 5^{n+2} & 3^{n+2} & (n+5)3^{n+1} \end{pmatrix}$, puis $A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 \times 5^n - (10n+5) \times 3^n & (16n+18)3^{n-1} - 6 \times 5^n & 5^n - (2n+3)3^{n-1} \\ \text{osef} & \text{osef} & \text{osef} \\ \text{osef} & \text{osef} & \text{osef} \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à conclure : $X_n = A^n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, d'où $u_n = 2 \times 5^n - (7n+3) \times 3^{n-1}$.