Devoir Maison n°5

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 6 février 2015

Exercice 1 : dénombrement

Soit E un ensemble fini à n éléments (par exemple $E = \{1, 2, \dots, n\}$. Une application $f : E \to E$ est une **involution** si $f \circ f = \mathrm{id}_E$. Une involution **sans point fixe** est une involution f pour laquelle aucun élément de E ne vérifie $f(x) = x$. On note T_n le nombre d'involutions de E, et S_n le nombre d'involutions sans point fixe de E.

1. Donner un exemple d'involution lorsque $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (pas trop trivial si possible). Est-il possible de créer une involution sans point fixe dans E (justifier) ?
2. Donner les valeurs de T_1, T_2, T_3, S_1, S_2 et S_3 en donnant la liste de toutes les applications convenables.
3. Montrer qu'on a toujours $S_n \leq T_n \leq n!$.
4. Soit $E = \{1, 2, \dots, n, n+1, n+2\}$.
   (a) On fixe un entier $k \in \{2, 3, \dots, n+2\}$. Déterminer en fonction de S_n le nombre d'involutions sans point fixe de E vérifiant $f(1) = k$. En déduire que $S_{n+2} = (n+1)S_n$.
   (b) Par un raisonnement similaire, déterminer une relation de récurrence entre T_{n+2}, T_{n+1} et T_n.
5. Déduire des résultats de la question précédente une formule explicite pour S_n lorsque n est un entier pair.
6. Montrer que $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k$, et en déduire une formule explicite pour T_n. Donner (à l'aide de la calculatrice) la valeur de T_{10}, et la comparer à celle de $10!$.

Exercice 2 : suites et matrices

I. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

On cherche dans cette partie à déterminer toutes les suites (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

1. Déterminer l'expression de u_n si on ajoute les conditions $u_0 = 1$ et $u_1 = 5$.
2. On note pour toute la suite de l'exercice $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
4. Déterminer deux matrices $C = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ et $C' = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$ telles que $AC = -C$ et $AC' = 2C'$.
5. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}.
6. Déterminer sans calcul $D = P^{-1}AP$, puis montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

7. En déduire l'expression de A^n, puis celle de u_n en fonction de n, u_1 et u_0.
8. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur l'expression explicite d'une suite (u_n) pour qu'elle vérifie la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

II. Un exemple d'ordre 3.

On veut désormais déterminer les suites (u_n) vérifiant la relation de réucurrence $u_{n+3} = 11u_{n+2} - 39u_{n+1} + 45u_n$. De façon similaire à ce qu'on a fait plus haut, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$, et prouver que $X_n = A^n X_0$.
2. Calculer $(A - 5I_3)(A - 3I_3)^2$, et en déduire que A est une matrice inversible (on donnera son inverse).
3. Déterminer trois matrices $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ d \end{pmatrix}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ e \\ f \end{pmatrix}$ vérifiant les relations suivantes : $AC_1 = 5C_1$; $AC_2 = 3C_2$; $AC_3 = C_2 + 3C_3$.
4. On définit comme dans la première partie une matrice P dont les colonnes sont les matrices C_1, C_2 et C_3. Montrer que P est inversible, et calculer P^{-1}.
5. Calculer $T = P^{-1}AP$, et prouver que, pour tout entier n, $A^n = PT^nP^{-1}$. Vérifier que cette relation reste valable lorsque $n = -1$.
6. Écrire la matrice sous la forme $D + N$, où D est une matrice diagonale et N une matrice nilpotente. En déduire une expression explicite de T^n.
7. Calculer u_n lorsque $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_2 = -1$.