Devoir Maison n°4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

19 décembre 2014

Exercice 1

1. On peut tout faire d'un seul coup en exhibant la réciproque (si elle existe, c'est nécessairement que f est bijective). Notons donc $Z = f(z) = \dfrac{1}{\bar{z}+i}$, alors $Z\bar{z} + iZ = 1$, donc $\bar{z} = \dfrac{1-iZ}{Z}$ (si $Z \neq 0$), et $z = \dfrac{1+i\bar{Z}}{\bar{Z}} = \dfrac{1}{\bar{Z}} + i$. Tout nombre complexe Z non nul admet donc un unique antécédent par f dans $\mathbb{C}\backslash\{i\}$. L'application f est bijective, et $f^{-1}(z) = \dfrac{1}{\bar{z}} + i$.

2. (a) En posant $z = a + ib$, on trouve $f(z) = \dfrac{1}{a-ib+i} = \dfrac{a+i(b-1)}{a^2+(1-b)^2} = \dfrac{a}{a^2+(1-b)^2} + \dfrac{b-1}{a^2+(1-b)^2}i$.

   (b) Au vu de la formule précédente, $f(z) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $b - 1 = 0$, soit $b = 1$. Autrement dit, z est de la forme $a + i$, et se trouve dans le plan complexe sur la droite horizontale d'équation $y = 1$ (on doit enlever tout de même $z = i$, valeur pour laquelle la fonction n'est pas définie).

   (c) Cette fois-ci, on obtient encore plus simplement $a = 0$, donc z doit être lui-même imaginaire pur (sur l'axe des ordonnées dans le plan complexe), en éliminant bien sûr la valeur interdite $z = i$.

   (d) Soit à partir de la forme algébrique, soit directement sous la forme $\dfrac{1}{\bar{z}+i}$, on voit que $|f(z)| = 1$ est équivalent à $a^2 + (b-1)^2 = 1$. Même pas la peine de modifier quoi que ce soit, on reconnait immédiatement le cercle de centre $A(i)$ et de rayon 1.

3. (a) Si $z = ki$, avec k un nombre réel, on aura $f(z) = \dfrac{1}{-ki+i} = \dfrac{i}{k-1}$ qui est encore imaginaire pur. Réciproquement, on a déjà vu que tous les imaginaires purs (sauf 0) ont un antécédent imaginaire pur par f. On en déduit que $f(i\mathbb{R}\backslash\{i\}) = i\mathbb{R}^*$.

   (b) Soit $z = x$ appartenant à $\mathbb{R}$, alors $f(z) = \dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{1}{x^2+1}i$. Pour vérifier que ce nombre a une image située sur le cercle de l'énoncé, il suffit de calculer sa distance au point A, soit $\left|f(z) + \dfrac{i}{2}\right| = \left|\dfrac{x}{x^2+1} + i\dfrac{x^2+1-2}{2(x^2+1)}\right| = \sqrt{\dfrac{4x^2+x^4-2x^2+1}{4(x^2+1)^2}} = \sqrt{\dfrac{(x^2+1)^2}{4(x^2+1)^2}} = \dfrac{1}{2}$. Le point est bien sur le cercle voulu, mais il faudrait maintenant prouver réciproquement que tout point de ce cercle a un antécédent réel. Un point sur ce cercle a pour affixe un nombre complexe de la forme $\dfrac{-i}{2} + \dfrac{e^{i\theta}}{2}$ (avec $\theta \not\equiv 0[2\pi]$). On peut alors écrire $f^{-1}(z) = \dfrac{1}{\bar{z}} + i = \dfrac{2}{i+e^{-i\theta}} + i = \dfrac{1+ie^{-i\theta}}{i+e^{-i\theta}} = \dfrac{(1+ie^{-i\theta})(e^{i\theta}-i)}{|i+e^{-i\theta}|^2} = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{|i+e^{-i\theta}|^2} \in \mathbb{R}$ (on reconnait au numérateur $2\cos(\theta)$ via les formules d'Euler).

   (c) On va tenter ici de partir de la réciproque de f, et de donner une condition pour que $f^{-1}(z) \in \mathbb{U}$. En notant $Z = a + ib$, on a $f^{-1}(Z) = \dfrac{1}{a-ib} + i = \dfrac{1+ia+b}{a-ib}$. On en déduit que $|f^{-1}(Z)|^2 = \dfrac{(b+1)^2+a^2}{a^2+b^2}$. Puisqu'on veut que ce module soit égal à 1, on trouve la condition $(b+1)^2+a^2 = a^2+b^2$, soit $2b+1=0$, donc $b = -\dfrac{1}{2}$. Les images des nombres complexes appartenant à $\mathbb{U}$ sont donc situées sur la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$ (et on a prouvé la réciproque au passage, la condition étant une équivalence).

4. (a) Cette équation revient à dire que $(-\bar{z}+\sqrt{3})(\bar{z}+i) = 1$, soit $-\bar{z}^2+(\sqrt{3}-i)\bar{z}+i\sqrt{3}-1 = 0$. Posons $Z = \bar{z}$, et résolvons l'équation du second degré $Z^2+(i-\sqrt{3})Z+1-i\sqrt{3} = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = (i-\sqrt{3})^2-4(1-i\sqrt{3}) = -1-2i\sqrt{3}+3-4+4i\sqrt{3} = -2+2i\sqrt{3} = 4\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On en déduit immédiatement les deux valeurs possibles de δ vérifiant $\delta^2 = \Delta$: $\delta = \pm 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. On peut donc, par exemple, prendre $\delta = 1+i\sqrt{3}$. On trouve alors comme solutions de notre équation $Z_1 = \dfrac{\sqrt{3}-i+\delta}{2} = \dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}+2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{12}}(e^{-i\frac{\pi}{4}}+e^{i\frac{\pi}{4}}) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ (on a utilisé une variante de la factorisation par l'angle moitié pour la fin du calcul). De même, on obtient $Z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}}-e^{i\frac{\pi}{3}} = -2i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{2})} = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$. Il ne reste plus qu'à passer au conjugué pour retrouver les valeurs de z : $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

   (b) On veut donc avoir $\dfrac{1}{\bar{z}+i} = z$, soit $z\bar{z}+iz = 1$, ou encore $iz = 1-|z|^2$. En particulier, iz doit être réel, ce qui implique que z lui-même est imaginaire pur, de la forme bi. L'équation devient alors $-b = 1-b^2$, ou encore $b^2-b-1 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 1+4 = 5$ et pour racines $b = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Les deux points fixes de la fonction f sont donc $z_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}i$ et $z_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}i$.

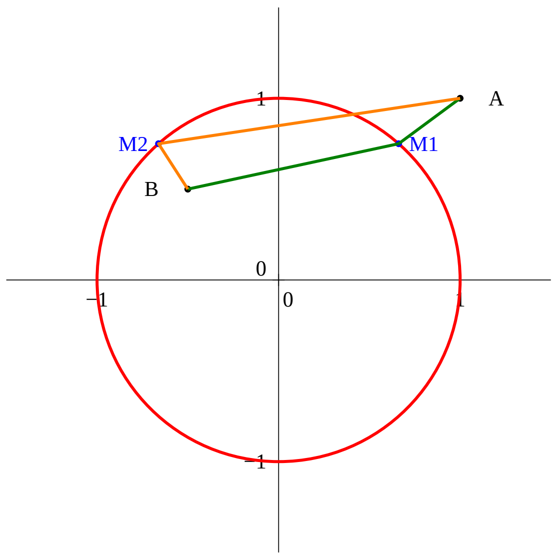
Exercice 2

1. On peut écrire $-4 = 4e^{i\pi}$ et en déduire immédiatement les racines quatrièmes : $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1+i$; $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1+i$; $z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = -1-i$; et $z_4 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} = 1-i$.
2. C'est une conséquence triviale de la factorisation par l'angle moitié. On peut aussi partir du membre de droite pour se fatiguer encore moins : $2ie^{i\alpha}\sin(\alpha) = e^{i\alpha}(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}) = e^{2i\alpha}-1$.
3. Calculons donc : $MA = |z_M - z_A| = |e^{i\alpha}-1-i| = \sqrt{(\cos(\alpha)-1)^2+(\sin(\alpha)-1)^2} = \sqrt{3-2\cos(\alpha)-2\sin(\alpha)}$. De même, $MB = \left|e^{i\alpha}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(\cos(\alpha)+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\sin(\alpha)-\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3}{2}+\cos(\alpha)-\sin(\alpha)}$. Il ne reste plus qu'à faire le produit $MA\times MB = \sqrt{\dfrac{9}{2}+3\cos(\alpha)-3\sin(\alpha)-3\cos(\alpha)-2\cos^2(\alpha)+2\cos(\alpha)\sin(\alpha)-3\sin(\alpha)-2\sin(\alpha)\cos(\alpha)+2\sin^2(\alpha)}$ $= \sqrt{\dfrac{9}{2}-6\sin(\alpha)-2+4\sin^2(\alpha)} = \sqrt{\dfrac{5}{2}-6\sin(\alpha)+4\sin^2(\alpha)}$. En mettant sous forme canonique ce qui se trouve sous la racine, on trouve sans grande surprise $MA\times MB = f(\alpha)$, où f est la fonction définie à la question suivante.
4. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, et la racine carrée ne changera rien aux variations. Elle est par ailleurs 2π-périodique, on va donc étudier sur $[-\pi,\pi]$ les variations de $g : \alpha \mapsto \dfrac{1}{4}+\left(2\sin(\alpha)-\dfrac{3}{2}\right)^2$. On calcule donc $g'(\alpha) = 4\cos(\alpha)\left(2\sin(\alpha)-\dfrac{3}{2}\right)$. Cette dérivée s'annule en

$\pm\dfrac{\pi}{2}$ et lorsque $\sin(\alpha) = \dfrac{3}{4}$, ce qui se produit deux fois entre 0 et π. On notera $\alpha_1 = \arcsin\left(\dfrac{3}{4}\right) < \dfrac{\pi}{2}$, et $\alpha_2 = \dfrac{\pi}{2} - \alpha_1 > \dfrac{\pi}{2}$. L'étude du signe ne pose pas de problème, la parenthèse n'étant positive qu'entre α_1 et α_2. On aura bien sûr $g(\alpha_1) = g(\alpha_2) = \dfrac{1}{4}$, et donc $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = \dfrac{1}{2}$; $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$, donc $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; et $g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{49}{4} = \dfrac{25}{2}$, donc $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$. On peut ajouter les valeurs $g(\pi) = g(-\pi) = g(0) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{9}{4} = \dfrac{5}{2}$ pour compléter le tableau de variations suivant :

α	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		α_1		$\frac{\pi}{2}$		α_2		π
f	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	$\nearrow$	$\frac{5}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$

5. Il n'y plus rien à faire : les points du cercle trigonométrique sont exactement ceux d'affixe $e^{i\alpha}$ et on vient de prouver qu'il y a deux valeurs de α (modulo 2π) pour lesquelles le produit de distances $MA \times MB$ est minimal. On peut même donner facilement les coordonnées des deux points correspondants puisqu'on sait qu'ils ont pour ordonnée $\dfrac{3}{4}$: ils vérifient $\cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha) = 1 - \dfrac{9}{16} = \dfrac{7}{16}$, soit $\cos(\alpha) = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}$. On trouve donc $M_1\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$ et $M_2\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$. Dans les deux cas, on a $MA \times MB = \dfrac{1}{2}$.
6. Bon, pas grand chose à mettre sur la figure :



Exercice 3

1. On peut écrire l'équation sous la forme $\left(\dfrac{z+1}{e^{2ia}}\right)^n = 1$. On sait que les racines n-èmes de l'unité sont de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, donc $\dfrac{z_k+1}{e^{2ia}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, puis $z_k + 1 = e^{i(\frac{2k\pi}{n}+2a)}$, et $z_k = e^{i(\frac{2k\pi}{n}+2a)} - 1$, pour les valeurs entières de k comprises entre 0 et $n-1$. On peut factoriser par l'angle moitié : $z_k = e^{i(a+\frac{k\pi}{n})}(e^{i(a+\frac{k\pi}{n})} - e^{-i(a+\frac{k\pi}{n})}) = 2i\sin\left(a + \dfrac{k\pi}{n}\right)e^{i(a+\frac{k\pi}{n})}$.

2. La formule obtenue à la question précédente donne envie de calculer $\prod_{k=0}^{n-1} z_k = \prod_{k=0}^{n-1} 2i\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)e^{i(a+\frac{k\pi}{n})} = 2^n i^n P_n e^{i\sum_{k=0}^{n-1} a+\frac{k\pi}{n}} = 2^n i^n e^{ina} e^{i(n-1)\frac{\pi}{2}} P_n$. On peut remarquer que la dernière exponentielle vaut i^{n-1} (puisque $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$) pour simplifier le produit en $2^n i^{2n-1} e^{ina} P_n$. Par ailleurs, on sait que $\prod_{k=0}^{n-1} z_k$ est le produit des racines de l'équation $(z+1)^n - e^{2ina} = 0$, dont le coefficient constant vaut $1 - e^{2ina}$. Comme le membre de gauche de l'équation peut se factoriser sous la forme $\prod_{k=0}^{n-1} z - z_k$, ce coefficient constant vaut aussi $(-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} z_k$. On en déduit que $\prod_{k=0}^{n-1} z_k = (-1)^n(1 - e^{2ina})$.
Reste à conclure : $P_n = \dfrac{(-1)^n(1-e^{2ina})}{2^n i^{2n-1} e^{ina}}$. On peut simplifier i^{2n} et $(-1)^n$, et factoriser par l'angle moitié le numérateur : $P_n = \dfrac{e^{ina}(e^{-ina} - e^{ina})}{2^n i^{-1} e^{ina}} = \dfrac{i(-2i\sin(na))}{2^n} = \dfrac{\sin(na)}{2^{n-1}}$.
On peut par exemple vérifier la formule pour $n = 2$, le produit de sinus vaut alors $\sin(a)\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right) = \sin(a)\cos(a) = \dfrac{\sin(2a)}{2}$.