Devoir Maison n°4

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 19 décembre 2014

Exercice 1

On note f l'application définie sur $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ par $f(z) = \dfrac{1}{\bar{z}+i}$.

1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ sur $\mathbb{C}^*$, et donner une expression de sa réciproque.
2. (a) Déterminer $f(z)$ sous forme algébrique.
   (b) Déterminer l'ensemble des nombres z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{R}$ (on donnera une interprétation géométrique).
   (c) Déterminer l'ensemble des nombres z pour lesquels $f(z) \in i\mathbb{R}$ (on donnera une interprétation géométrique).
   (d) Déterminer l'ensemble des nombres z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{U}$ (on donnera une interprétation géométrique).
3. (a) Déterminer $f(i\mathbb{R}\backslash\{i\})$.
   (b) Prouver que $f(\mathbb{R})$ est le cercle de centre $A\left(-\dfrac{i}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$, privé de l'origine.
   (c) Déterminer $f(\mathbb{U})$ (on doit trouver un ensemble simple).
4. (a) Résoudre l'équation $f(z) = -\bar{z}+\sqrt{3}$ (on mettra les solutions sous forme trigonométrique).
   (b) Déterminer les points fixes de f, c'est-à-dire les z vérifiant $f(z) = z$.

Exercice 2

On considère dans le plan les deux points A d'affixe $z_A = 1+i$ et B d'affixe $z_B = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$. On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1. On fixe de plus un réel $\alpha \in [0, 2\pi]$ et on note M le point d'affixe $z_M = e^{i\alpha}$.

1. Déterminer les racines quatrièmes de -4 (on les donnera sous forme algébrique).
2. Montrer que $e^{2i\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}\sin(\alpha)$.
3. Calculer le produit de distances $MA \times MB$.
4. Étudier les variations (sur une période) de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin(\alpha)\right)^2}$.
5. Déduire des deux questions précédentes qu'il existe deux points de $\mathcal{C}$ pour lesquels $MA \times MB$ est minimale, et préciser la valeur correspondante.
6. Faire une figure pour illustrer.

Exercice 3

1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \geq 1$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^n = e^{2ina}$.
2. En déduire une expression simple de $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \dfrac{k\pi}{n}\right)$.