Devoir Maison n°3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

27 novembre 2014

Exercice 1

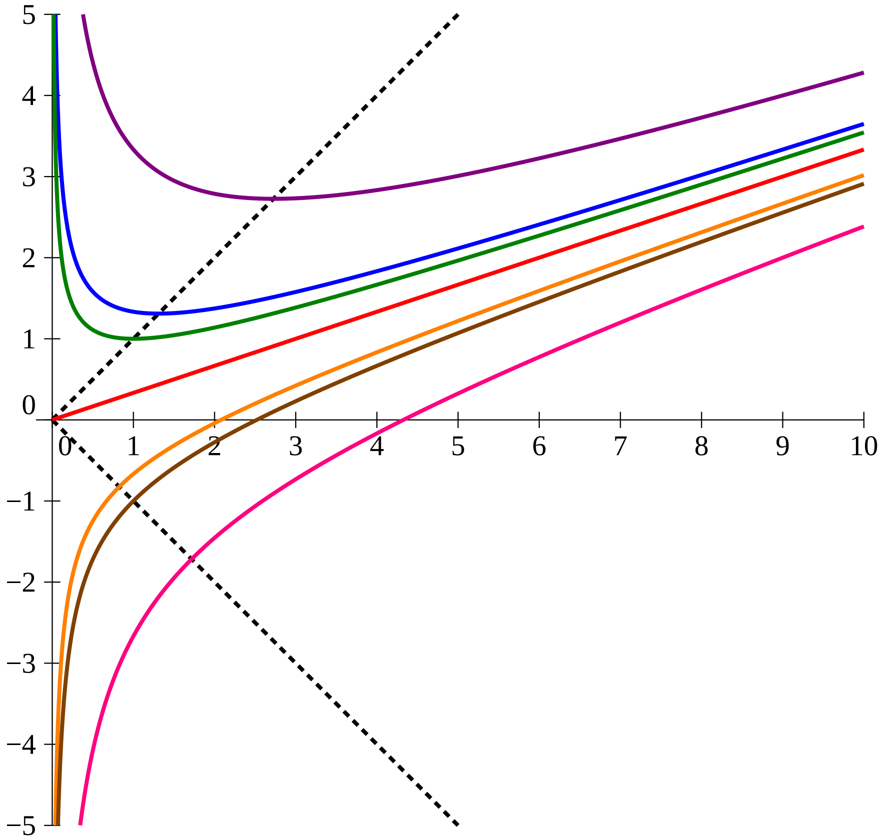
1. Posons donc $y_p(x) = P(x)\operatorname{sh}(x)$, alors $y_p'(x) = P'(x)\operatorname{sh}(x)+P(x)\operatorname{ch}(x)$, et $y_p''(x) = P''(x)\operatorname{sh}(x)+2P'(x)\operatorname{ch}(x) + P(x)\operatorname{sh}(x)$, puis $y_p''(x) - y_p(x) = P''(x)\operatorname{sh}(x) + 2P'(x)\operatorname{ch}(x)$. Si on veut que notre fonction soit solution de (E), il suffit donc d'avoir à la fois $P''(x) = 0$ et $P'(x) = 1$, ce qui marche très bien avec $P(x) = x$. On peut donc poser $y_p(x) = x\operatorname{sh}(x)$. Les solutions de l'équation homogène associée à (E) étant les fonctions de la forme $y_h(x) = A\operatorname{sh}(x) + B\operatorname{ch}(x)$ (non, pas besoin de calculs pour ça), on en déduit que les solutions de (E) sont de la forme $y(x) = (A + x)\operatorname{sh}(x) + B\operatorname{ch}(x)$.
2. Notons donc y une solution de (F) (contrairement à ce qu'indique l'énoncé), et posons $y(x) = \dfrac{z(x)}{x}$, alors $y'(x) = \dfrac{z'(x)}{x} - \dfrac{z(x)}{x^2}$ (en dérivant comme un produit plutôt que comme un quotient), puis $y''(x) = \dfrac{z''(x)}{x} - 2\dfrac{z'(x)}{x^2} + \dfrac{2z(x)}{x^3}$. Le membre de gauche de l'équation (F) est donc égal à $z''(x) - 2\dfrac{z'(x)}{x} + 2\dfrac{z(x)}{x^2} + 2\dfrac{z'(x)}{x} - 2\dfrac{z(x)}{x^2} - z(x) = z''(x) - z(x)$. Si y est solution de (F), la fonction f est donc solution de (E). Puisqu'on a vu précédemment que $z(x) = (A+x)\operatorname{sh}(x)+B\operatorname{ch}(x)$, on en déduit que les solutions de l'équation (F) sont les fonctions $y(x) = \operatorname{sh}(x) + \dfrac{A\operatorname{sh}(x) + B\operatorname{ch}(x)}{x}$.
3. Les deux conditions se traduisent par $\operatorname{sh}(1) + A\operatorname{sh}(1) + B\operatorname{ch}(1) = 0$, et $y'(x) = \operatorname{ch}(x) + \dfrac{Ax\operatorname{ch}(x) + Bx\operatorname{sh}(x) - A\operatorname{sh}(x) - B\operatorname{ch}(x)}{x^2}$, donc $\operatorname{ch}(1)+A\operatorname{ch}(1)+B\operatorname{sh}(1)-A\operatorname{sh}(1)-B\operatorname{ch}(1) = \operatorname{sh}(1)$. Le plus simple est de constater brutalement que $A = -1$ et $B = 0$ conviennent, ce qui donne $z(x) = \operatorname{sh}(x) - \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x}$.

Exercice 2

1. On normalise pour obtenir $y' + \dfrac{y}{2x} = \dfrac{1}{2}$. Les solutions de l'équation homogène associée sont $y_h(x) = Ke^{-\frac{1}{2}\ln(x)} = \dfrac{K}{\sqrt{x}}$. Utilisons la variation de la constante pour déterminer une solution particulière de la forme $y_p(x) = \dfrac{K(x)}{\sqrt{x}}$. On a alors $y_p'(x) = \dfrac{K'(x)}{\sqrt{x}} - \dfrac{K(x)}{2x\sqrt{x}}$. Sans surprise, les termes en $K(x)$ se simplifient dans le calcul de $y_p'(x)+\dfrac{y_p(x)}{2x}$, et il ne reste plus que $\dfrac{K'(x)}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}$, soit $K'(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$, et $K(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{3}$. Notre solution particulière est donc $y_p(x) = \dfrac{x}{3}$ (oui, on pouvait aussi la trouver directement), et les solutions complètes de l'équation sont donc de la forme $y(x) = \dfrac{K}{\sqrt{x}} + \dfrac{x}{3}$.

2. Dans la formule précédente, on a $y(1) = K + \frac{1}{3}$, donc on pose simplement $f_k(x) = \frac{k}{\sqrt{x}} + \frac{x}{3}$. Puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{k}{\sqrt{x}} = 0$ (indépendamment de la valeur de k), la droite d'équation $y = \frac{x}{3}$ est asymptote oblique à toutes les courbes intégrales de l'équation.
3. Puisque $f_k(1) = k + \frac{1}{3}$, et $f_k'(x) = -\frac{k}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{3}$, donc $f_k'(1) = \frac{1}{3} - \frac{k}{2}$, l'équation de la tangente recherchée est $y = \left(\frac{1}{3} - \frac{k}{2}\right)(x-1) + k + \frac{1}{3} = \frac{x}{3} - \frac{kx}{2} + \frac{3k}{2}$. Pour que les tangentes soient concourantes, il faut trouver une valeur de x pour laquelle y ne dépend pas de k. Autrement dit il faut annuler $-\frac{kx}{2} + \frac{3k}{2}$, ce qui est le cas lorsque $x = 3$. On a alors toujours $y = 1$, ce qui prouve que toutes nos tangentes passent par le point $A(3,1)$.
4. Il suffit de résoudre l'équation $f_k'(x) = 0$, soit $\frac{k}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{3}$, ou encore $x^{\frac{3}{2}} = \frac{3k}{2}$. On obtient donc l'unique solution $x = \left(\frac{3k}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ si $k > 0$ (si $k \leq 0$, la dérivée ne s'annule jamais, et f_k est strictement croissante). Cette valeur semble sans aucun intérêt, mais il faut avoir le courage de calculer l'ordonnée des points correspondants : $f_k\left(\frac{3^{\frac{2}{3}}k^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}\right) = k \times \frac{2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}k^{\frac{1}{3}}} + \frac{3^{\frac{2}{3}}k^{\frac{2}{3}}}{3 \times 2^{\frac{2}{3}}} = \frac{k^{\frac{2}{3}}2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} + \frac{k^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}2^{\frac{2}{3}}} = \frac{k^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}3^{\frac{1}{3}}} \times (2+1) = \frac{k^{\frac{2}{3}}3^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}$, soit exactement la valeur de l'abscisse du minimum. Cela signifie que tous les minimums des fonctions f_k sont situés sur la droite d'équation $y = x$.
5. Là encore, une petite équation à résoudre : $-\frac{k}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{3} = 1$ (la condition donnée revient à dire que la pente de la tangente vaut 1), soit $\frac{k}{2x\sqrt{x}} = -\frac{2}{3}$, puis $x^{\frac{3}{2}} = -\frac{3k}{4}$. Cette fois-ci, l'équation n'a pas de solution si $k \geq 0$, mais elle en a une si $k < 0$, égale à $\left(-\frac{3k}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$. On peut effectuer un calcul d'ordonnée très similaire à celui de la question précédente : $f_k\left(\frac{3^{\frac{2}{3}}(-k)^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{4}{3}}}\right) = \frac{k^{\times}2^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}(-k)^{\frac{1}{3}}} + \frac{3^{\frac{2}{3}}(-k)^{\frac{2}{3}}}{3 \times 2^{\frac{4}{3}}} = \frac{(-k)^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{4}{3}}3^{\frac{1}{3}}} \times (-4+1) = -\frac{3^{\frac{2}{3}}(-k)^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{4}{3}}}$, soit l'exact opposé de la valeur où la tangente a pour pente 1. Autrement dit, les points correspondant sont situés sur la droite d'équation $y = -x$.
6. Pour $\mathcal{C}_0$, pas beaucoup à se fatiguer puisqu'il s'agit d'une droite. On sait que f_1 a une dérivée qui s'annule quand $x = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \simeq 1.31$ (et l'ordonnée prend la même valeur d'après les calculs précédents). Plus simple, pour $k = \frac{2}{3}$, la fonction f_k aura une tangente horizontale au point de coordonnées $(1,1)$. On peut ajouer que, lorsque $k > 0$, la fonction f_k est décroissante puis croissante, avec des limites égales à $+\infty$ en 0 et en $+\infty$. Si $k < 0$, on a déjà vu que la fonction était strictement croissante, avec cette fois-ci $\lim_{x\to 0} f_k(x) = -\infty$, le seul point d'intérêt est celui où la tangente a pour pente 1. Pour $k = -1$, il se situe pour $x = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \simeq 0.83$ (et avec une ordonnée opposée). Pour $k = -\frac{4}{3}$, la tangente de pente 1 se situe au point de coordonnées $(-1,-1)$. Sur le graphique suivant, les droites d'équation $y = x$ et $y = -x$ sont indiquées en pointillées, la courbe $\mathcal{C}_0$ (qui est également l'asymptote commune à toutes les courbes intégrales) en rouge, $\mathcal{C}_1$ en bleu, $\mathcal{C}_{\frac{2}{3}}$ en vert, $\mathcal{C}_3$ en violet, $\mathcal{C}_{-1}$ en orange, $\mathcal{C}_{-\frac{4}{3}}$ en marron, et $\mathcal{C}_{-3}$ en rose (les tangentes remarquables n'ont pas été indiquées pour ne pas surcharger, mais elles se situent

évidemment aux intersection entre les courbes et les demi-droites en pointillés) :



7. Il n'y aucune difficulté particulière sur $]-\infty, 0[$, on trouve des solutions de la forme $y(x) = \dfrac{L}{\sqrt{x}} + \dfrac{x}{3}$ (la solution particulière reste la même). Pour prolonger les solutions en 0, il faut absolument que la constante soit nulle si on ne veut pas avoir de limite infinie, ce qui implique immédiatement que la seule solution définie sur $\mathbb{R}$ est la fonction $f_0 : x \mapsto \dfrac{x}{3}$.

Problème

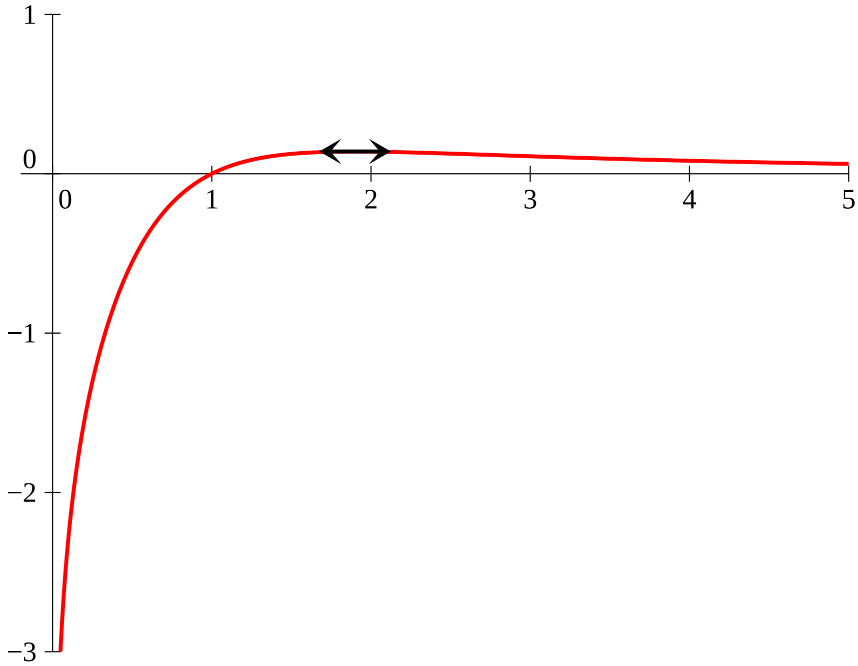
I. Étude d'une fonction.

1. Calculons donc $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} + x - 2x\ln(x)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$, qui est bien du signe de $g(x)$ quand $x > 0$.
2. On va évidemment dériver une fois de plus : $g'(x) = 2x - 4x\ln(x) - 2x = -4x\ln(x)$. Même pas besoin de s'embêter avec un tableau de variations, la fonction g est croissante sur $]0, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$. Par croissance comparée (pour le terme en $x^2\ln(x)$), $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$. Par ailleurs, $g(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln(x))$, ce qui permet de prouver facilement que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. Pas vraiment la peine de calculer le maximum de g (bon, on peut : $g(1) = 2$), la fonction sera nécessairement positive puis négative, et s'annule pour une unique valeur.
3. Au vu des deux questions précédentes, la fonction f est croissante sur $]0, m]$ et décroissante sur $[m, +\infty[$. Elle atteint pour maximum $f(m) = \dfrac{\ln(m)}{1+m^2}$. Or, par définition, $g(m) = 0$, ce qui signifie que $1 + m^2 = 2m^2\ln(m)$. On peut donc écrire $f(m) = \dfrac{\ln(m)}{2m^2\ln(m)} = \dfrac{1}{2m^2}$. Notons

en passant que $m > 1$, donc $f(m) < \dfrac{1}{2}$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ (aucune difficulté), et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (croissance comparée). La fonction f s'annule par ailleurs quand $x = 1$, et elle est positive sur $[1, +\infty[$. On peut donc dresser le tableau suivant :

x	0		1		m		$+\infty$
f					$\frac{1}{2m^2}$		
		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0
	$-\infty$						

4. La calculatrice (ou même Python !) donne $m \simeq 1.90$, et $f(m) \simeq 0.14$. On prend évidemment une échelle adaptée pour la représentation graphique :



II. Étude d'une fonction définie par une intégrale.

1. C'est la primitive de f s'annulant en 1.
2. Si $x \geq 1$, la fonction intégrée est positive et les bornes sont dans le bon sens, donc $F(x) \geq 0$. Mais si $x < 1$, les bornes sont inversées et on intègre une fonction négative, donc $F(x) \geq 0$ quand même ! Finalement, F est toujours positive (et s'annule bien sûr pour $x = 1$). Ceux qui aiment se compliquer la vie peuvent aussi utiliser les variations de F puisqu'on connait le signe de sa dérivée f : elle est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$, et admet en 1 un minimum de valeur 0, donc elle est toujours positive.
3. Par définition, $F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \displaystyle\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\, dt$. Effectuons le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$. Les bornes de l'intégrale deviennent donc 1 et x, et $dt = -\dfrac{1}{u^2}\, du$, et on trouve donc $F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \displaystyle\int_1^x \frac{-\ln(u)}{1+\frac{1}{u^2}} \times \frac{-1}{u^2}\, du = \int_0^x \frac{\ln(u)}{u^2+1}\, du$. C'est exactement la valeur de $F(x)$.
4. (a) On reconnait bien sûr un taux d'accroissement : $g(x) = \dfrac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0}$ va tendre quand x tend vers 0 vers $\arctan'(0)$. Comme $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, on a donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$.

(b) On effectue évidemment une IPP dans $F(x)$ en posant $u(t) = \ln(t)$, donc $u'(t) = \frac{1}{t}$, et $v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$, donc $v(t) = \arctan(t)$. On trouve alors immédiatement $F(x) = [\ln(t)\arctan(t)]_1^x - \int_1^x \frac{\arctan(t)}{t}\, dt$, ce qui donne la formule souhaitée.

(c) On peut écrire $\ln(x)\arctan(x) = (x\ln(x)) \times \frac{\arctan(x)}{x}$, avec $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ (croissance comparée classique), et $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$ (on vient de le calculer !), donc $\lim_{x\to 0} \ln(x)\arctan(x) = 0$. Par ailleurs, $\lim_{x\to 0} -\int_1^x g(t)\, dt = \int_0^1 g(t)\, dt$ (la fonction ayant pour limite 0 en 0, on la prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$, et cette intégrale existe donc bien). On est incapable de calculer l'intégrale, mais peu importe.

(d) La dérivée f de F admet pour limite $-\infty$ en 0, donc F n'est pas dérivable en 0 mais y admet une tangente verticale.

5. (a) C'est un cas classique d'IPP : on pose $u(t) = \ln(t)$, donc $u'(t) = \frac{1}{t}$, et $v'(t) = t^k$ qui donne $v(t) = \frac{t^{k+1}}{k+1}$, et on trouve $I_k(x) = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^k}{k+1}\, dt = \frac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1} - \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)^2}\right]_1^x = \frac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1} - \frac{x^{k+1}-1}{(k+1)^2}$.

(b) Inutile de faire une récurrence, on calcule simplement $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k = \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$. Le membre de droite de l'égalité souhaitée vaut donc $\frac{1-(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$.

(c) Il ne faut surtout pas remplacer les $I_{2k}(x)$ par leur valeur, mais commencer par tout regrouper sous une même intégrale :
$|F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)| = \left|\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\, dt - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_1^x t^{2k}\ln(t)\, dt\right|$
$= \left|\int_1^x \ln(t)\left(\frac{1}{1+t^2} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}\right) dt\right| = \left|\int_1^x \ln(t)(-1)^{n+1}\frac{t^{2n+1}}{1+t^2}\, dt\right|$ en utilisant le résultat de la question précédente. Majorons maintenant la valeur absolue par l'intégrale de la valeur absolue comme le suggère l'énoncé pour trouver une majoration par (j'ai la flemme de recopier le membre de gauche) : $-\int_1^x \left|\frac{\ln(t)t^{2n+2}}{1+t^2}\right| dt = \int_1^x \frac{\ln(t)t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$ (la fonction à intégrer étant négative mais les bornes dans le mauvais sens). On peut aller un peu plus loin : $\frac{1}{1+t^2}$ est toujours inférieur à 1, donc on peut en fait majorer par $\int_1^x \ln(t)t^{2n+2}$, c'est-à-dire par $I_{2n+2}(x)$.

(d) Si l'inégalité de la question précédente est vraie pour tout x entre 0 et 1, elle doit le rester quand on fait tendre x vers 0 (on sera plus rigoureux dans ce genre de raisonnement après le chapitre sur la continuité). Il faudrait connaitre la limite quand x tend vers 0 de $I_{2k}(x)$. Ce n'est pas compliqué : $\lim_{x\to 0} x^{2k+1}\ln(x) = 0$ par croissance comparée, et le reste ne pose pas de problème, donc $\lim_{x\to 0} I_{2k}(x) = \frac{1}{(2k+1)^2}$. Autrement dit, le membre de gauche de notre inégalité tend vers $|F(0) - u_n|$, et notre majoration de droite tend vers $\frac{1}{(2n+3)^2}$, ce qui donne exactement la majoration souhaitée.

(e) Il suffit de trouver un entier n pour lequel $\frac{1}{(2n+3)^2} < 10^{-2}$, u_n sera alors à une distance de $F(0)$ inférieure à 10^{-2}. On doit donc avoir $2n+3 > 10$, soit $n \geq 4$. Le calcul peut en fait presque se faire à la main : $u_4 = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \frac{1}{81} = \frac{91\ 369}{99\ 225} \simeq 0.92$.

6. Voici une allure :