Devoir Maison n°3

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 27 novembre 2014

Exercice 1

On considère dans cet exercice les deux équations différentielles (E) : $y'' - y = 2\,\mathrm{ch}(x)$, et (F) : $xy'' + 2y' - xy = 2\,\mathrm{ch}(x)$.

1. Déterminer une solution particulière de l'équation (E) de la forme $y_p(x) = P(x)\,\mathrm{sh}(x)$, où P est un polynôme. En déduire la résolution complète de l'quation (E).
2. On cherche à résoudre (F) sur l'intervalle $]0, +\infty[$. En notant z une solution de l'équation (F), et en posant $y(x) = \dfrac{z(x)}{x}$, déterminer une équation différentielle vérifiée par la fonction y, et en déduire les solutions de l'équation (F).
3. Déterminer l'unique solution z de l'équation (F) vérifiant $z(1) = 0$ et $z'(1) = \mathrm{sh}(1)$.

Exercice 2

On s'intéresse dans tout cet exercice à l'équation différentielle (E) : $2xy' + y = x$.

1. Résoudre l'équation sur $]0, +\infty[$.
2. On note f_k l'unique solution de (E) vérifiant $f_k(1) = k + \dfrac{1}{3}$, et $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k. Donner l'expression de $f_k(x)$, et vérifier que toutes les courbes $\mathcal{C}_k$ admettent une asymptote commune quand x tend vers $+\infty$.
3. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_k$ en son point d'abscisse 1, et montrer que toutes ces tangentes sont concourantes (elles se coupent en un même point) quand k parcourt $\mathbb{R}$.
4. Déterminer l'ensemble des points où les courbes $\mathcal{C}_k$ admettent une tangente horizontale (lorsque k parcourt $\mathbb{R}$).
5. Déterminer l'ensemble des points où les courbes $\mathcal{C}_k$ admettent une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$ (lorsque k parcourt $\mathbb{R}$).
6. Tracer dans un même repère une allure soignée de plusieurs courbes $\mathcal{C}_k$ (on tracera au moins les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_{-1}$) en tenant compte de tous les calculs effectués précédemment.
7. Que se passe-t-il si on cherche à résoudre (E) sur $]-\infty, 0[$? Existe-t-il des solutions à l'équation définies sur $\mathbb{R}$?

Problème

I. Étude d'une fonction.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$, et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

1. Calculer $f'(x)$, et montrer qu'elle est du même signe que $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction g, et montrer en particulier qu'elle s'annule en une unique valeur qu'on notera désormais m.
3. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f. On calculera en particulier $f(m)$ en fonction de m.
4. Donner à l'aide de la calculatrice (mais si !) une valeur approchée de m et de $f(m)$, et tracer une allure de la courbe $\mathcal{C}$.

II. Étude d'une fonction définie par une intégrale.

On considère désormais la fonction F définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$.

1. Que représente la fonction F pour f ?
2. Déterminer le signe de $F(x)$.
3. Montrer que, $\forall x > 0$, $F\left(\dfrac{1}{x}\right) = F(x)$.
4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(x) = \dfrac{\arctan(x)}{x}$.
   (a) Montrer que g admet une limite finie quand x tend vers 0.
   (b) Montrer que $F(x) = \ln(x)\arctan(x) - \displaystyle\int_1^x g(t)\,dt$.
   (c) En déduire que F admet une limite quand x tend vers 0 (qu'on notera abusivement $F(0)$ par la suite).
   (d) La fonction F est-elle dérivable en 0 ? Quelle est l'allure de la courbe représentative de F quand x se rapproche de 0 ?
5. On cherche à calculer une valeur approchée de $F(0)$, et on pose pour cela $I_k(x) = \displaystyle\int_1^x t^k\ln(t)\,dt$ (pour $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$).
   (a) Calculer $I_k(x)$.
   (b) Montrer que $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2x+2}}{1+x^2}$.
   (c) En déduire, pour $x \in]0,1[$, une majoration de $|F(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)|$ (on pourra utiliser le fait que $|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$).
   (d) En posant $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$, montrer que $|F(0) - u_n| \leq \dfrac{1}{(2n+3)^2}$.
   (e) En déduire comment obtenir une valeur approchée à 10^{-2} près de $F(0)$, et donner cette valeur à l'aide de la calculatrice (encore !).
6. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction F.