Devoir Maison n°2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

3 novembre 2014

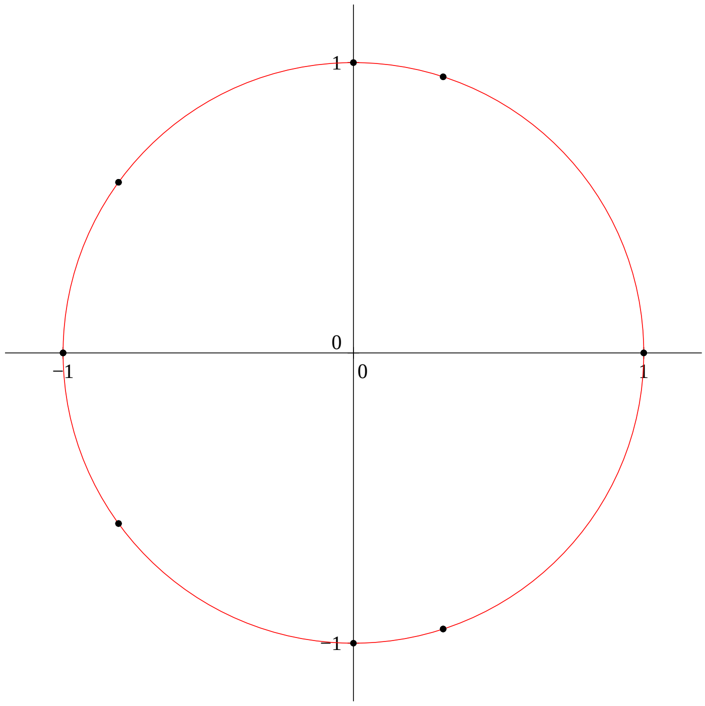
Exercice 1

Première méthode : utilisation brutale des formules de duplication.

On écrit donc $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)+\sin(4x) = \sin(x)+2\sin(x)\cos(x)+3\sin(x)-4\sin^3(x)+2\sin(2x)\cos(2x) = \sin(x)+2\sin(x)\cos(x)+3\sin(x)-4\sin^3(x)+4\sin(x)\cos(x)(2\cos^2(x)-1) = \sin(x)(1+2\cos(x)+3-4\sin^2(x)+8\cos^3(x)-4\cos(x)) = \sin(x)(1+2\cos(x)+3-4+4\cos^2(x)+8\cos^3(x)-4\cos(x)) = \sin(x)(-2\cos(x)+4\cos^2(x)+8\cos^3(x)) = 2\sin(x)\cos(x)(4\cos^2(x)+2\cos(x)-1)$. Notre équation est donc vérifiée dans un des trois cas suivants : soit $\sin(x)=0$, c'est-à-dire $x\equiv 0[\pi]$; $\cos(x)=0$, soit $x\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ (on peut regrouper ces deux premiers cas sous la forme $x\equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$), soit enfin $4\cos^2(x)+2\cos(x)-1=0$. Pour ce dernier cas, on va poser $X=\cos(x)$, et résoudre l'équation $4X^2+2X-1=0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4+16=20$, et admet deux racines réelles $X_1 = \frac{-2-\sqrt{20}}{8} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$, et $X_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Ces deux solutions ayant le bon gout d'être comprises entre -1 et 1, elles donnent quatre nouvelles valeurs possibles pour x (modulo 2π, sous la forme $x=\pm\arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$ et $x=\pm\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)$. Si on est très savant, on peut reconnaitre là les angles moyennement remarquables $\pm\frac{2\pi}{5}$ et $\pm\frac{4\pi}{5}$.

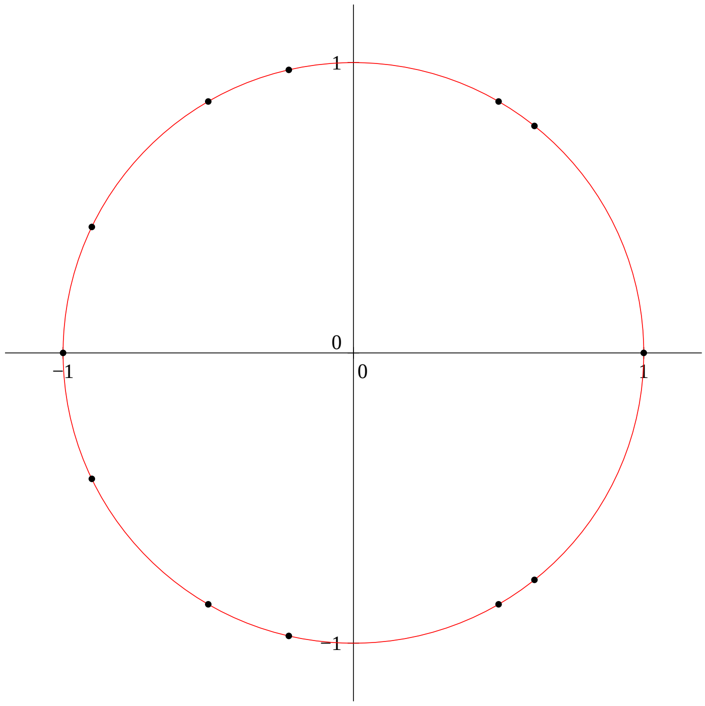
Deuxième méthode : utilisation de transformations sommes-produits.

Il est effectivement beaucoup plus rapide de faire des transformations sommes-produits de la forme $\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ sur les deux sinus extrêmes et sur les deux sinus du milieu. On trouve alors $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)+\sin(4x) = 2\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)+2\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$. L'équation est donc vérifiée si $\sin\left(\frac{5x}{2}\right)=0$, soit $\frac{5x}{2}\equiv 0[\pi]$, et donc $x\equiv 0\left[\frac{2\pi}{5}\right]$; ou si $\cos\left(\frac{3x}{2}\right) = \cos\left(\pi-\frac{x}{2}\right)$, ce qui donne deux autres possiblités supplémantaires : soit $\frac{3x}{2}\equiv \pi-\frac{x}{2}[2\pi]$, donc on déduit $x\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$; soit enfin $\frac{3x}{2}\equiv\frac{x}{2}-\pi[2\pi]$, qui donne $x\equiv\pi[2\pi]$. Si on regroupe toutes ces possiblités, on retrouve bien les mêmes solutions que par la première méthode (mais de façon plus directement explicite). Pour visualiser un peu, représentons les points correspondants sur le cercle trigonométrique :



Généralisation.

Pour la somme de six sinus, il vaut évidemment mieux utiliser la deuxième méthode. On peut commencer par utiliser nos formules sommes-produits sur les sinus deux à deux (les deux extrêmes, les deux médians, les deux autres), puis on utilise à nouveau une transformation somme-produit sur les cosinus extrêmes obtenus : $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)+\sin(4x)+\sin(5x)+\sin(6x) = 2\sin\left(\frac{7x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{5x}{2}\right)+\cos\left(\frac{3x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{7x}{2}\right)\left(2\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\cos(x)+\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{7x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)(2\cos(x)+1)$. Les solutions de l'équation initiale vérifient donc une des trois conditions suivantes : soit $\sin\left(\frac{7x}{2}\right)=0$, ce qui donne $\frac{7x}{2}\equiv 0[\pi]$, donc $x\equiv 0\left[\frac{2\pi}{7}\right]$; soit $\cos\left(\frac{3x}{2}\right)=0$, ce qui donne $\frac{3x}{2}\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$, donc $x\equiv\frac{\pi}{3}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$; soit encore $\cos(x)=-\frac{1}{2}$, ce qui donne $x\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ ou $x\equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$. On peut en fait regrouper les deux derniers cas (et le cas particulier $x=0$ issu du premier cas) sous la forme $x\equiv 0\left[\frac{2\pi}{3}\right]$. On peut encore une fois placer toutes les solutions sur le cercle trigonométrique :



Exercice 2

Ah, une seule méthode demandée pour cet exercice, et de fait une seule est raisonnablement disponible : la récurrence (on ne sait absolument pas calculer le produit à gauche de l'inégalité). Notons donc P_n la propriété $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^3}\right) \leq 3-\frac{1}{n}$. Vérifions la propriété au rang 1 : $\displaystyle\prod_{k=1}^{1} 1+\frac{1}{k^3} = 2$ (un seul terme dans le produit) et $3-\frac{1}{1} = 2$, donc la propriété P_1 est vérifiée. Supposons désormais P_n vérifiée, alors on peut affirmer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{k^3}\right) = \left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^3}\right) \leq \left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right) \times \left(3-\frac{1}{n}\right)$. Il suffit donc pour prouver P_{n+1} d'arriver à montrer que $\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right) \times \left(3-\frac{1}{n}\right) \leq 3-\frac{1}{n+1}$, soit $3+\frac{3}{(n+1)^3}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n(n+1)^3} \leq 3-\frac{1}{n+1}$, soit encore en simplifiant les 3, en passant tout à droite et en mettant au même dénominateur : $\frac{-3n+(n+1)^3+1-n(n+1)^2}{n(n+1)^3} \geq 0$. On développe le numérateur (le dénominateur est clairement positif) pour obtenir $-3n+n^3+3n^2+3n+1+1-n^3-2n^2-n = n^2-n+2$, dont on vérifie facilement que c'est effectivement toujours positif (discriminant négatif et coefficient dominant égal à 1). La propriété P_{n+1} est donc vérifiée, et le principe de récurrence permet d'affirmer que P_n est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 3

Première méthode : par un calcul de dérivée.

Posons donc $f(x) = \arctan(x) + 2\arctan(\sqrt{1+x^2}-x)$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{2}{1+(\sqrt{1+x^2}-x)^2} \times \left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}-1\right) = \frac{1}{1+x^2} +$

$\dfrac{2}{1+1+x^2-2x\sqrt{1+x^2}+x^2}\times\dfrac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+x^2-x\sqrt{1-x^2}}\times\dfrac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-x)\times\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+x^2} = 0$. La fonction f est donc sans surprise constante, on obtient sa valeur en calculant par exemple $f(0)=\arctan(0)+2\arctan(1)=0+2\times\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$.

Deuxième méthode : avec un peu de trigonométrie.

Posons donc $x=\tan(\theta)$, avec $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ (ce qui est toujours possible puisque la fonction tangente effectue une bijection de cet intervalle vers $\mathbb{R}$). On a alors $\arctan(x)=\arctan(\tan(\theta))=\theta$ car θ est justement dans l'intervalle image de la fonction arctangente. De plus, $\sqrt{1+x^2}-x=\sqrt{1+\tan^2(\theta)}-\tan(\theta)=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2(\theta)}}-\tan(\theta)$. Or, $\cos(\theta)\geq 0$ sur l'intervalle choisi, donc $\sqrt{1+x^2}-x=\dfrac{1}{\cos(\theta)}-\tan(\theta)=\dfrac{1-\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$. On vo udrait donc que $\arctan\left(\dfrac{1-\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}$ (dans ce cas on aura bien $f(x)=\theta+2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$. Comme $\dfrac{\theta}{2}\in\left]-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right[$, l'angle $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}$ appartient à $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, il suffit donc de vérifier que sa tangente vaut $\dfrac{1-\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ pour avoir l'égalité souhaitée. Or, $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{1-\tan(\frac{\theta}{2})}{1+\tan(\frac{\theta}{2})}$ (formule d'addition des tangentes), soit $\dfrac{\cos(\frac{\theta}{2})-\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2})}=\dfrac{\cos^2(\frac{\theta}{2})-\sin^2(\frac{\theta}{2})}{(\cos(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2}))^2}=\dfrac{\cos(\theta)}{1+2\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2})}=\dfrac{\cos(\theta)}{1+\sin(\theta)}$ (en utilisant les formules de duplication du cosinus et du sinus pour les dernières étapes). Il ne reste plus qu'à constater que $\dfrac{\cos(\theta)(1-\sin(\theta))}{1-\sin^2(\theta)}=\dfrac{1-\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ pour conclure cet affreux calcul !

Exercice 4

Commençons donc par faire la décomposition en éléments simples, par exemple en mettant brutalement tout au même dénominateur : $\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1}+\dfrac{c}{k+3}=\dfrac{a(k+1)(k+3)+bk(k+3)+ck(k+1)}{k(k+1)(k+3)}=\dfrac{(a+b+c)k^2+(4a+3b+c)k+3a}{k(k+1)(k+3)}$. Par identification, on doit donc avoir $a+b+c=0$; $4a+3b+c=0$ et $3a=1$, qui donne immédiatement $a=\dfrac{1}{3}$. Les deux autres équations deviennent alors $b+c=-\dfrac{1}{3}$ et $3b+c=-\dfrac{4}{3}$. En soustrayant les deux, on trouve tout de suite $2b=-1$, soit $b=-\dfrac{1}{2}$, dont on déduit $c=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$. Finalement, on conclut que $\dfrac{1}{k(k+1)(k+3)}=\dfrac{1}{3k}-\dfrac{1}{2(k+1)}+\dfrac{1}{6(k+3)}$. On peut maintenant calculer la somme par télescopage :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+3)} &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{6}\sum_{k=4}^{n+3}\frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{6}\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k} \\
&\quad + \frac{1}{6(n+1)} + \frac{1}{6(n+2)} + \frac{1}{6(n+3)} \\
&= \frac{4}{9} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{6(n+2)} + \frac{1}{6(n+3)} \\
&= \frac{7}{36} + \frac{(n+1)(n+3) + (n+1)(n+2) - 2(n+2)(n+3)}{6(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{7}{36} - \frac{3n+7}{6(n+1)(n+2)(n+3)}
\end{aligned}$$

Soyons fous et démontrons donc par récurrence la propriété P_n : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+3)} = \frac{7}{36} - \frac{3n+7}{6(n+1)(n+2)(n+3)}$ (en fait, il est nettement préférable pour la simplicité de la récurrence de ne pas tout mettre au même dénominateur et d'utiliser la décomposition en éléments simples pour l'hérédité). Au rang 1, on constate que $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)(k+3)} = \frac{1}{1 \times 2 \times 4} = \frac{1}{8}$, et $\frac{7}{36} - \frac{10}{6 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{28}{144} - \frac{10}{144} = \frac{18}{144} = \frac{1}{8}$. La propriété P_1 est bien vérifiée. Supposons donc P_n vraie, alors on peut écrire :
$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+3)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+3)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+4)} = \frac{7}{36} - \frac{3n+7}{6(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+4)} = \frac{7}{36} - \frac{(3n+7)(n+4) - 6(n+3)}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{7}{36} - \frac{3n^2+13n+10}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$.
On constate que le numérateur s'annule pour $n = -1$, et a pour deuxième racine $-\frac{10}{3}$ (au pire on calcule son discriminant $\Delta = 169 - 120 = 49$), donc $3n^2 + 13n + 10 = (n+1)(3n+10)$. En simplifiant avec le dénominateur et en constatant que $3n + 10 = 3(n+1) + 7$, on a exactement prouvé P_{n+1}. Par principe de récurrence, la propriété P_n est donc vrai pour tout entier $n \geq 1$.

Dernier point : la limite de la somme quand n tend vers $+\infty$ vaut manifestement $\frac{7}{36}$.