Devoir Maison n°1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

22 septembre 2014

Exercice 1

1. (a) Le dénominateur de f s'annulant lorsque $x^2 = 1$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$.

   (b) Le domaine de définition de f est symétrique par rapport à 0, et $f(-x) = -f(x)$ (le numérateur change de signe, mais pas le dénominateur), donc f est impaire. La courbe $\mathcal{C}$ sera symétrique par rapport à l'origine O du repère.

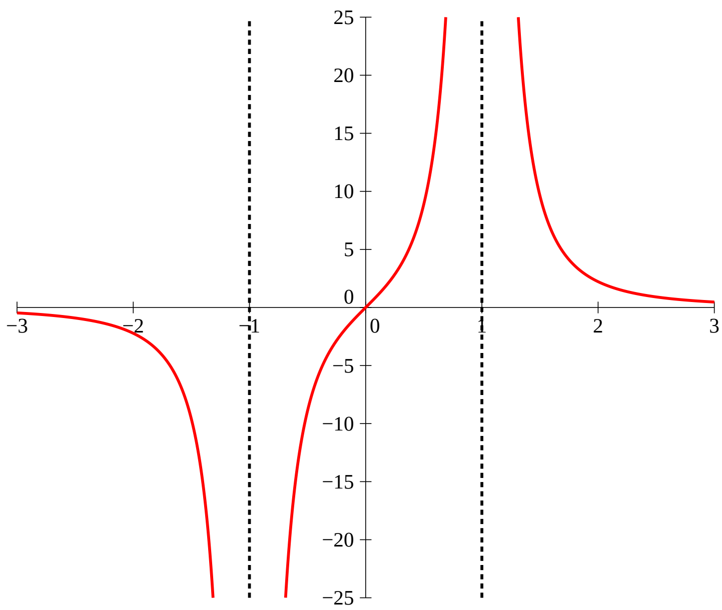
   (c) Calculons donc : en notant $v(x) = (x^2-1)^2$, on a $v'(x) = 4x(x^2-1)$, puis $f'(x) = \dfrac{10(x^2-1)^2 - 40x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \dfrac{10(x^2-1) - 40x^2}{(x^2-1)^3} = \dfrac{-10-30x^2}{(x^2-1)^3}$. Le numérateur de cette fraction est toujours négatif, son dénominateur est du signe de $x^2 - 1$, donc négatif entre les racines, soit sur $[-1, 1]$. On en déduit donc le tableau de variations suivant (les limites indiquées dans le tableau seront calculées à la question suivante) :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

   On calcule sans difficulté $f'(0) = 10$.

   (d) Pour calculer les limites en $\pm\infty$, on utilise le quotient des termes de plus haut degré : $f(x) = \dfrac{10x}{x^4 - 2x^2 + 1}$, donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{10}{x^3} = 0$. Quand x tend vers 1 ou -1, le dénominateur de f aura toujours pour limite 0 par valeurs positives. On en déduit aisément que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

   (e) On va bien évidemment prendre une échelle adaptée pour tracer la courbe. Notons par exemple que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 20$, et $f(2) = \dfrac{20}{9}$.



2. (a) Il suffit de poser $k = 5$ et $v(x) = x^2 - 1$.
   (b) La fonction $\frac{v'}{v^2}$ étant la dérivée de $-\frac{1}{v}$, une primitive de f sera $F : x \mapsto -\frac{5}{x^2-1}$.
   (c) Il suffit de calculer $\int_2^3 f(t)\,dt = F(3) - F(2) = -\frac{5}{8} + \frac{5}{3} = \frac{25}{24}$.

Exercice 2

1. L'énoncé donne explicitement $P(G_1) = \frac{1}{2}$. L'événement G_2 peut se produire de deux façons différentes : soit Juliette gagne la première partie, puis gagne la deuxième, ce qui a une probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{6}{10} = \frac{3}{10}$ de se produire (si on veut être savant on a calculé $P(G_1 \cap G_2) = P(G_1) \times P_{G_1}(G_2)$) ; soit Juliette perd la première partie puis gagne la deuxième, ce qui se produit avec une probabilité $\frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{7}{10}\right) = \frac{3}{20}$ de se produire. Globalement, $P(G_2) = \frac{3}{10} + \frac{3}{20} = \frac{9}{20}$.
2. C'est l'événement contraire : $P(P_2) = 1 - P(G_2) = \frac{11}{20}$.
3. Chaque partie étant soit gagnée soit perdue, on aura toujours $x_n + y_n = 1$.
4. C'est exactement le même principe que pour le calcul de G_2 : on peut gagner la partie $n+1$ de deux façons, soit en ayant gagné la version n puis en gagnant à nouveau (probabilité $x_n \times \frac{6}{10}$), soit en perdant la partie n mais en gagnant la suivante, avec probabilité $y_n \times \frac{3}{10}$. On obtient bien la formule souhaitée pour x_{n+1}. Celle pour y_{n+1} s'obtient soit par le même raisonnement, soit en passant plus directement par l'événement contraire.
5. À l'aide de la question précédente, on calcule $w_{n+1} = 4x_{n+1} - 3y_{n+1} = \frac{24}{10}x_n + \frac{12}{10}y_n - \frac{12}{10}x_n - \frac{21}{10}y_n = \frac{12}{10}x_n - \frac{9}{10}y_n = \frac{3}{10}(4x_n - 3y_n) = \frac{3}{10}w_n$. La suite (w_n) est donc géométrique de raison $\frac{3}{10}$, et de premier terme $w_1 = 4x_1 - 3y_1 = \frac{4}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$. On en déduit que $w_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$ (attention, on part du terme numéro 1).
6. On peut écrire $x_n = \frac{1}{7}(w_n + 3(x_n + y_n)) = \frac{1}{7}(w_n + 3) = \frac{3}{7} + \frac{1}{14}\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$. On passe au

complémentaire pour trouver $y_n = \dfrac{4}{7} - \dfrac{1}{14}\left(\dfrac{3}{10}\right)^{n-1}$.

7. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} = 0$, la suite (x_n) admet bien une limite finie, égale à $\dfrac{3}{7}$. Cela signifie qu'à long terme, Juliette finira par gagner en moyenne trois parties sur sept.

Problème

A. Étude des variations de f_n.

1. La fonction g_n est dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée $g_n'(x) = 2x + \dfrac{n}{x}$. Cette dérivée étant positive, g_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ (on pouvait aussi le constater sans calculer de dérivée, puisqu'elle est somme de fonctions croissantes). De plus, $\displaystyle\lim_{x\to 0} g_n(x) = -\infty$, et $g_n(x) = x^2\left(1 - \dfrac{n}{x} + \dfrac{n\ln(x)}{x^2}\right)$, avec une parenthèse qui tend vers 1 en $+\infty$ en exploitant les données de l'énoncé, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$. La fonction g_n est donc bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, 0 admet un unique antécédent α_n par g_n. Comme $g_n(1) = 1 - n \leq 0$, et $g_n(3) = 9 + n(\ln(3) - 1) > 0$ (on rappelle au cas où que $\ln(3) > 1$), la croissance de la fonction g_n assure que $1 \leq \alpha_n < 3$. La fonction g_n est donc négative sur $]0, \alpha_n]$, et positive sur $[\alpha_n, +\infty[$.
2. Calculons : f_n est dérivable sur son domaine de définition, et $f_n'(x) = 1 - \dfrac{n - n\ln(x)}{x^2} = \dfrac{x^2 - n + n\ln(x)}{x^2} = \dfrac{g_n(x)}{x^2}$. Cette dérivée est du signe de $g_n(x)$, on en déduit le tableau de variations suivant (limites calculées à la question suivante) :

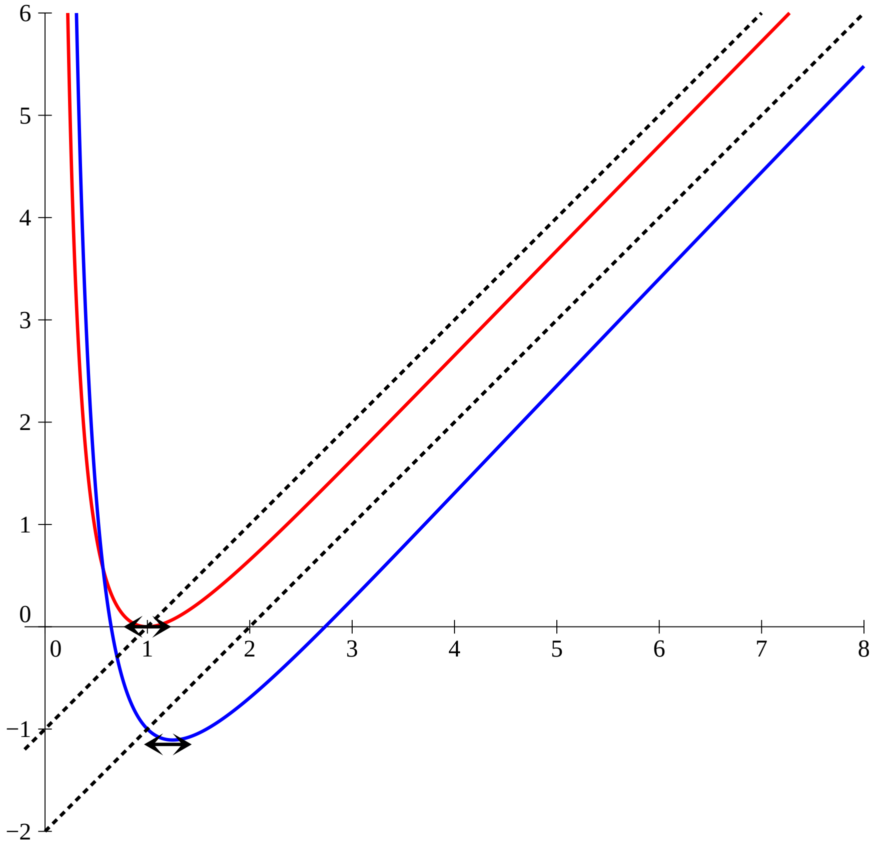
x	0		α_n		$+\infty$
f_n	$+\infty$	$\searrow$	$f_n(\alpha_n)$	$\nearrow$	$+\infty$

On ne peut évidemment pas dire grand chose du minimum de la fonction.

3. En 0, il n'y a pas de forme indéterminée, puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{n\ln(x)}{x} = -\infty$, ce qui implique directement que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f_n(x) = +\infty$. Pas vraiment de difficulté non plus en $+\infty$, comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$, on a immédiatement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. Pour l'asymptote, il suffit de constater que $f_n(x) - (x - n) = -\dfrac{n\ln(x)}{x}$, a pour limite 0 en $+\infty$. La position relative est donnée par la signe de $-\dfrac{n\ln(x)}{x}$, qui est le même que celui de $-\ln(x)$. La courbe est donc au-dessus de la droite sur $]0, 1]$ et en-dessous sur $[1, +\infty[$, et coupe la droite au point de coordonnées $(1, 1 - n)$.

B. Tracé de courbes pour $n = 1$ et $n = 2$.

1. Pour $n = 1$, on a simplement $g_1(x) = x - 1 + \ln(x)$, qui s'annule manifestement pour $\alpha_1 = 1$. On calcule ensuite $f_1(\alpha_1) = 0$.
2. Voici les courbes, $\mathcal{C}_1$ en rouge, $\mathcal{C}_2$ en bleu, et les asymptotes en noir :



3. Il faut donc calculer $I = \displaystyle\int_1^e f_1(t)\ dt = \int_1^e t - 1 - \frac{\ln(t)}{t}\ dt$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ est de la forme $u'u$, avec $u(t) = \ln(t)$, c'est-à-dire qu'il s'agit, à un simple facteur 2 près, de la dérivée de $u^2(t) = \ln^2(t)$. On en déduit que $I = \left[\dfrac{t^2}{2} - t - \dfrac{\ln^2(t)}{2}\right]_1^e = \dfrac{e^2}{2} - e - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} + 1 + 0 = \dfrac{e^2}{2} - e$.

C. Étude des positions relatives des courbes $\mathcal{C}_n$.

1. On calcule sans problème $f_n(x) - f_{n+1}(x) = x - n - \dfrac{n\ln(x)}{x} - x + n + 1 + \dfrac{(n+1)\ln(x)}{x} = 1 + \dfrac{\ln(x)}{x}$. En utilisant une fois de plus les limites données par l'énoncé, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) - f_{n+1}(x) = 1$ (rien de surprenant vu les asymptotes respectives aux deux courbes).

2. (a) La fonction h est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $h'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$. Cette dérivée s'annule pour $x = e$. Sans forme indéterminée, on obtient $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = -\infty$, et en exploitant une dernière fois la limite de l'énoncé, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$. Soit le tableau de variations suivant :

x	0	e	$+\infty$
h	$-\infty$ ↗	$1 + \dfrac{1}{e}$	↘ 1

   (b) La fonction h ne peut pas s'annuler sur l'intervalle $[e, +\infty[$ puisqu'elle y est minorée par 1. Sur $]0, e]$, elle est continue et strictement croissante, donc bijective vers $\left]-\infty, 1 + \dfrac{1}{e}\right]$, intervalle auquel appartient 0. Il y a donc bien un unique antécédent pour 0 par h. De plus, $h(1) = 1 > 0$, et h étant croissante sur $]0, e]$, on en déduit que $\beta < 1$.

(c) Par définition, $1 + \dfrac{\ln(\beta)}{\beta} = 0$. En remplaçant dans l'expression de f_n, le terme $-n - \dfrac{n\ln(x)}{x}$ s'annule donc pour $x = \beta$, et il reste $f_n(\beta) = \beta$.

3. Puisque $f_n(x) - f_{n+1}(x)$ est du signe de $h(x)$, l'étude précédente prouve que $\mathcal{C}_n$ est en-dessous de $\mathcal{C}_{n+1}$ sur l'intervalle $]0, \beta[$ et au-dessus sur l'intervalle $]\beta, +\infty[$. Toutes les courbes représentatives $\mathcal{C}_n$ se coupent au point A de coordonnées (β, β) (qui est accessoirement un point situé sur la droite d'équation $y = x$).