Devoir Maison n°1 : auriez-vous eu votre bac au 20$^{\text{ème}}$ siècle ?

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 22 septembre 2014

Ce sujet est constitué de morceaux (légèrement adaptés) de vieux (voire très très vieux) sujets de bac. Il n'est pas censé refléter un vrai sujet de bac complet dans la mesure où l'équilibre des thèmes du programme de lycée n'est pas respecté, mais au niveau de la longueur, je n'ai pas vraiment triché.

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{10x}{(x^2-1)^2}$.

1. Étude de la fonction f.
   (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
   (b) Déterminer la parité de la fonction f. Que peut-on en déduire sur sa courbe représentative $\mathcal{C}$?
   (c) Calculer la dérivée f' de la fonction f, et en déduire ses variations. Que vaut $f'(0)$?
   (d) Étudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
   (e) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé.
2. (a) Montrer qu'on peut écrire f sous la forme $\dfrac{kv'}{v^2}$, où k est une constante et v une fonction à préciser.
   (b) En déduire une primitive de la fonction f.
   (c) Calculer l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$ (on représentera le domaine correspondant sur le graphique effectué à la question 1.e).

Exercice 2

Juliette joue plusieurs parties successives d'un même jeu. Elle a une chance sur deux de gagner la première partie. Ensuite, si elle gagne une partie, elle a une probabilité égale à $\dfrac{6}{10}$ de gagner la suivante ; par contre, si elle perd une partie, elle a une probabilité $\dfrac{7}{10}$ de perdre à nouveau la suivante. On note, pour tout entier naturel n, G_n l'événement « Juliette gagne la partie numéro n » et P_n l'événement « Juliette perd la partie numéro n ».

1. Déterminer $P(G_1)$ puis $P(G_2)$ (on pourra s'aider d'un arbre).
2. En déduire $P(P_2)$.
3. Pour alléger les notations, on note $x_n = P(G_n)$ et $y_n = P(P_n)$. Que peut-on dire de $x_n + y_n$?
4. Expliquer (par exemple à l'aide d'un arbre) les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & \dfrac{6}{10}x_n + \dfrac{3}{10}y_n \\ y_{n+1} & = & \dfrac{4}{10}x_n + \dfrac{7}{10}y_n \end{array}\right.$$

5. Montrer que la suite (w_n) définie par $w_n = 4x_n - 3y_n$ est une suite géométrique, et exprimer w_n en fonction de n.
6. En combinant le résultat précédent avec la valeur obtenue pour $x_n + y_n$, déterminer la valeur de x_n puis celle de y_n.
7. La suite (x_n) admet-elle une limite quand n tend vers $+\infty$? Comment interpréter ce résultat ?

Problème

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés des fonctions f_n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f_n(x) = x - n - \dfrac{n\ln(x)}{x}$. On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n, et on pourra utiliser sans justification les résultats suivants : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$.

A. Étude des variations de f_n.

1. On note g_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g_n(x) = x^2 - n + n\ln(x)$. Étudier les variations de g_n, et montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n appartenant à l'intervalle $[1, 3]$. En déduire le signe de $g_n(x)$ en fonction de x.
2. Calculer $f_n'(x)$, et utiliser la question précédente pour étudier les variations de f_n.
3. Étudier les limites de f_n en 0 et en $+\infty$. Prouver que la droite (D_n) d'équation $y = x - n$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_n$, et étudier la position relative de D_n et de $\mathcal{C}_n$.

B. Tracé de courbes pour $n = 1$ et $n = 2$.

1. En reprenant les notations de la partie précédent, déterminer la valeur de α_1, et en déduire $f_1(\alpha_1)$. On admet que $\alpha_2 \simeq 1.2$, et $f_2(\alpha_2) \simeq -1.2$.
2. Tracer dans un même repère les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, ainsi que leurs asymptotes D_1 et D_2.
3. Calculer la valeur exacte de l'aire comprise entre $\mathcal{C}_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

C. Étude des positions relatives des courbes $\mathcal{C}_n$.

1. Calculer la différence $f_n(x) - f_{n+1}(x)$ et déterminer la limite de cette différence quand x tend vers $+\infty$.
2. On note h la fonction définie par $h(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{x}$.
   (a) Étudier les variations de h, et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
   (b) Déduire de la question précédente que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution β, qui appartient à l'intervalle $]0, 1[$.
   (c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $f_n(\beta) = \beta$.
3. Déduire des résultats des questions précédentes que $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$ se coupent en un point A dont on précisera les coordonnées, et donner les positions relatives de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$.