Concours Blanc : corrigé

PTSI A et B Lycée Eiffel

26 mai 2014

Exercice 1

Partie I. Étude d'une fonction f.

1. On sait qu'au voisinage de 0, $e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$, donc $e^{-x} = 1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$. On en déduit que $1-e^{-x} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, puis que $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$. En particulier, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, et la fonction prolongée est donc continue en 0. La continuité de f sur $]0,+\infty[$ est évidente, c'est un quotient de fonctions usuelles.
2. Aucun calcul supplémentaire, l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 en 0 pour f prouve que la fonction est dérivable en 0, et $f'(0) = -\frac{1}{2}$ (coefficient devant x dans le développement limité).
3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{xe^{-x}-1+e^{-x}}{x^2}$, on peut donc poser $\varphi(x) = (x+1)e^{-x}-1$.
4. La fonction φ est dérivable (elle l'est même sur $\mathbb{R}$), de dérivée $\varphi'(x) = e^{-x}-(x+1)e^{-x} = -xe^{-x}$. Cette dérivée étant négative sur $]0,+\infty[$, la fonction φ y est décroissante. Or, $\varphi(0) = 1-1 = 0$, donc φ est négative sur $\mathbb{R}^{+*}$. La fonction f' est donc négative, et f est décroissante sur son domaine de définition. Pour compléter le tableau de variations, on peut constater que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (pas de forme indéterminée, le numérateur tend vers 1).

x	0	$+\infty$
$f(x)$	1 $\searrow$	0

Partie II. Étude d'une suite.

1. Lorsque $u \in [0,n]$, $-1 \leqslant -\frac{u}{n} \leqslant 0$, donc $-\frac{1}{e} \leqslant e^{-\frac{u}{n}}$. Cela permet de minorer notre intégrale : $u_n \geqslant \displaystyle\int_0^n \frac{1}{e} \times \frac{1}{1+u}\,du = \frac{1}{e}[\ln(u+1)]_0^n = \frac{1}{e}\ln(n+1)$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e}\ln(n+1) = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. La fonction f étant continue sur le segment $[0,1]$, son intégrale est bien définie. De plus, $\displaystyle\int_0^n \frac{1}{1+u}\,du - u_n = \int_0^n \frac{1-e^{-\frac{u}{n}}}{1+u}\,du$. La fonction à l'intérieur de cette intégrale est positive entre 0 et n (on a déjà signalé plus haut que l'exponentielle y est majorée par 1), ce qui prouve l'inégalité de gauche. Pour celle de droite, effectuons le changement de variable $x = \frac{u}{n}$. Les bornes de l'intégrale deviennent 0 et 1, et $dx = \frac{1}{n}du$, donc $\displaystyle\int_0^n \frac{1-e^{-\frac{u}{n}}}{1+u}\,du = \int_0^1 n \times$

$\dfrac{1-e^{-x}}{1+nx}\,dx = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1-e^{-x}}{\frac{1}{n}+x}\,dx$. Comme $\dfrac{1}{n}+x \geqslant x$, on aura $\displaystyle\int_0^n \dfrac{1-e^{-x}}{\frac{1}{n}+x}\,dx \leqslant \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1-e^{-x}}{x}\,dx = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

3. En notant C l'intégrale de la fonction f entre 0 et 1, l'encadrement précédent peut s'écrire $0 \leqslant \ln(n+1) - u_n \leqslant C$, soit $0 \leqslant 1 - \dfrac{u_n}{\ln(n+1)} \leqslant \dfrac{C}{\ln(n+1)}$. Le théorème des gendarmes permet d'en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{u_n}{\ln(n+1)} = 0$, et donc que $u_n \sim \ln(n+1)$. On peut même affiner un peu en remarquant que $u_n \sim \ln(n)$.

Exercice 2

1. En deux lancers, on ne peut avoir au maximum qu'un seul changement, donc $X_2(\Omega) = 0, 1$. L'événement $X_2 = 0$ se produit si on a tiré deux fois le même côté de la pièce, donc $P(X_2 = 0) = p^2 + q^2$. De même, $X_2 = 1$ se produit si on a tiré PF ou FP, soit $P(X_2 = 1) = 2pq$. La somme de ces deux probabilités vaut $(p+q)^2 = 1$, tout va bien.
2. (a) Similairement à la question précédente, $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. L'événement $X_3 = 0$ se produit si on tire trois Piles ou trois Faces consécutifs, soit $P(X_3 = 0) = p^3 + q^3$. L'événement $X_3 = 2$ se produit au contraire si on change à chaque tirage, donc pour les séries de tirages PFP et FPF, ce qui donne $P(X_3 = 2) = p^2q + pq^2 = pq(p+q) = pq$. Enfin, les quatre dernière possibilités PPF, FFP, PFF et FPP amènent toutes $X_3 = 1$, d'où $P(X_3 = 1) = 2p^2q + 2pq^2 = 2pq$. On peut résumer tout ceci dans un magnifique tableau de la loi de X_3 :

k	0	1	2
$P(X_3 = k)$	$p^3 + q^3$	$2pq$	pq

   (b) Vérifions donc : $E(X) = 0 \times (p^3 + q^3) + 1 \times 2pq + 2 \times pq = 4pq$. De même, $E(X^2) = 2pq + 4pq = 6pq$. En appliquant la formule de König-Huygens, on en déduit que $V(X) = 6pq - 16p^2q^2 = 2pq(3 - 8pq)$.
3. (a) Les calculs vont être un peu plus long. On a bien sûr $X_4(\Omega) = 0, 1, 2, 3$, et $P(X_4 = 0) = p^4 + q^4$. Comme précédemment, seuls deux cas (sur les seize au total) donneront $X_4 = 3$, quand on tire $PFPF$ ou $FPFP$, d'où $P(X_4 = 3) = 2p^2q^2$. Sur les douze cas qui nous restent, $PPFP$, $FFPF$, $PFPP$, $FPFF$, $PFFP$ et $FPPF$ donnent tous $X_4 = 2$, soit $P(X_4 = 2) = 2(p^2q^2 + pq^3 + qp^3) = 2pq(p^2 + q^2 + pq) = 2pq(1 - pq) = 2pq - 2p^2q^2$. Enfin, les six derniers cas $PPPF$, $FFFP$, $PFFF$, $FPPP$, $PPFF$ et $FFPP$ contribuent à avoir $X_4 = 1$, et $P(X_4 = 1) = P(X_4 = 2) = 2pq - 2p^2q^2$. Tout cela mérite bien un nouveau tableau :

k	0	1	2	3
$P(X_3 = k)$	$p^4 + q^4$	$2(pq - p^2q^2)$	$2(pq - p^2q^2)$	$2p^2q^2$

   (b) Calculons donc : $E(X_4) = 2pq - 2p^2q^2 + 4pq - 4p^2q^2 + 6p^2q^2 = 6pq$. Les plus en forme d'entre vous n'auront sûrement pas manqué de conjecturer un résultat plus général pour l'espérance de X_n.
4. (a) L'événement $X_n = 0$ ne se produit que si on ne tire que des Piles (probabilité p^n) ou que des faces (probabilités q^n), donc $P(X_n = 0) = p^n + q^n$.

   (b) L'événement $X_n = 1$ peut se produire de deux façons : soit une suite de k Piles suivie de $n-k$ Faces, pour un entier k variant entre 1 et $n-1$ (si $k = 0$ ou $k = n$, il n'y a pas de changement !), soit au contraire une suite de k Faces suivie de $n-k$ Piles, pour les mêmes valeurs de k. Toutes ces possibilités étant clairement incompatibles, $P(X_n = 1) = \sum_{k=1}^{n-1} p^k q^{n-k} + q^k p^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-2} p^{k+1}q^{n-k-1} + q^{k+1}p^{n-k-1} = pq^{n-1}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^k + qp^{n-1}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{q}{p}\right)^k$. On reconnait bien sûr des sommes géométriques : $P(X_n = 1) = pq^{n-1}\dfrac{1-\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}}{1-\frac{p}{q}} + qp^{n-1}\dfrac{1-\frac{q^{n-1}}{p^{n-1}}}{1-\frac{q}{p}} = \dfrac{pq(q^{n-1}-p^{n-1})}{q-p} + \dfrac{qp(p^{n-1}-q^{n-1})}{p-q} = \dfrac{2pq(p^{n-1}-q^{n-1})}{p-q}$.

(c) Pour avoir $X_n = n-1$, il faut alterner les Piles et les Faces en permanence. Si n est pair (disons $n = 2k$), la dernière pièce tombera du côté opposé à la première et les deux possibilités $PFP\dots FPF$ et $FPF\dots PFP$ ont la même probabilité p^kq^k, donc $P(X_n = n-1) = 2p^kq^k$. Si au contraire $n = 2k+1$ est impair, les deux pièces extrêmes vont tomber sur le même côté, et la série $PFP\dots FP$ aura pour probabilité $p^{k+1}q^k$, alors que l'autre possibilité a pour probabilité p^kq^{k+1}, ce qui donne $P(X_n = n-1) = q^kp^{k+1} + q^{k+1}p^k = p^kq^k(p+q) = p^kq^k$.

5. (a) Si $p = q = \frac{1}{2}$, les trois probabilités obtenues pour la loi de X_3 valent respectivement $\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$, ce qui correspond exactement à une loi binômiale de paramètre $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ (nombre de Piles obtenues sur deux lancers de pièce équilibrée si on préfère). Pour X_4, on obtient de même les quatre probabilités $\frac{1}{16}+\frac{1}{16} = \frac{1}{8}$; $2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right) = \frac{3}{8}$: à nouveau $\frac{3}{8}$, et enfin $\frac{1}{8}$, ce qui correspond à une loi binômiale de paramètre $\left(3, \frac{1}{2}\right)$ (les quatre probabilités sont de la forme $\frac{1}{8}\times\binom{3}{k}$).

(b) Dans le cas où la pièce est équilibrée, c'est en fait très simple : à partir du deuxième tirage et jusqu'au dernier, chaque nouveau lancer introduit un changement par rapport au précédent avec probabilité $\frac{1}{2}$ (peu importe ce qui a été obtenu auparavant), puisqu'on a une chance sur deux d'avoir la face opposée à la précédente. On se contente donc de compter le nombre de succès dans une série de $n-1$ tentatives successives d'un événement aléatoire ayant une probabilité $\frac{1}{2}$ de se produire, ce qui est un cas d'école de loi binômiale. Plus précisément X_n suit une loi binômiale de paramètre $\left(n-1, \frac{1}{2}\right)$, donc $E(X_n) = \frac{n-1}{2}$ et $V(X_n) = \frac{n-1}{4}$.

Exercice 3

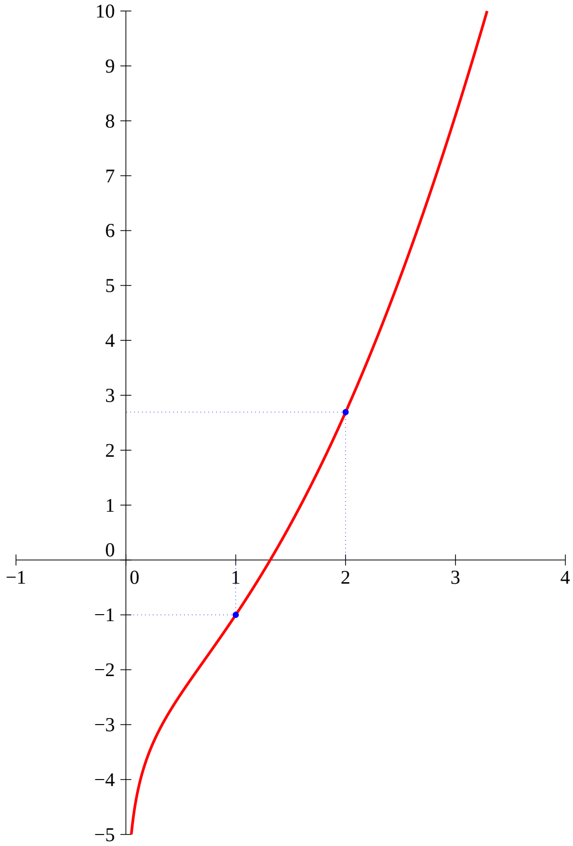
1. (a) La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$. Cette dérivée étant strictement positive, la fonction g est strictement croissante (d'ailleurs, le calcul de dérivée est très facultatif puisque g est somme de fonctions croissantes).

(b) Pas de forme indéterminée en 0, $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$. En $+\infty$, pas de forme indéterminée non plus : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

(c) D'après les deux questions précédentes, la fonction g effectue une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution. Comme par ailleurs $g(1) = 1 + 0 - 2 = -1$ et $g(2) = 4 + \ln(2) - 2 = 2 + \ln(2) > 0$, la croissance de la fonction g assure que $1 < \alpha < 2$.

(d) La fonction g est manifestement négative sur $]0, \alpha[$ et positive sur $]\alpha, +\infty[$.

(e) Contentons-nous de signaler que $g(2) \simeq 2.7$ en utilisant la valeur approchée donnée par l'énoncé, et traçons la courbe (oui, je sais, le repère n'est pas orthonormé) :



2. (a) En bon élève consciencieux, on connait par coeur sa primitive de la fonction ln et on calcule donc sans coup férir $\displaystyle\int_1^\alpha \ln(x)\ dx = [x\ln(x) - x]_1^\alpha = \alpha(\ln(\alpha) - 1) + 1$. On peut utiliser le fait que $g(\alpha) = 0$ pour remplacer $\ln(\alpha)$ par $2 - \alpha^2$ et obtenir $\displaystyle\int_1^\alpha \ln(x)\ dx = \alpha - \alpha^3 + 1$.

   (b) En réutilisant la question précédente, $\displaystyle\int_1^\alpha g(x)\ dx = \int_1^\alpha x^2 - 2\ dx + \alpha - \alpha^3 + 1 = \frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - \frac{1}{3} + 2 + \alpha - \alpha^3 + 1 = \frac{8 - 2\alpha^3}{3} - \alpha$. Nous sommes en parfait accord avec l'énoncé.

3. (a) La fonction h est certainement définie (ce n'est pas si évident !) et dérivable sur $[1, 2]$, et $h'(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{2 - \ln(x)}}$. Cette dérivée étant tout ce qu'il y a de plus négative, h est décroissante sur $[1, 2]$. De plus, $h(1) = \sqrt{2} < 2$ et $h(2) = \sqrt{2 - \ln(2)} > 1$, puisque $2 - \ln(2) > 1$. L'intervalle $[1, 2]$ est bien stable par la fonction h.

   (b) C'est une récurrence quasi-évidente. Posons donc P_n : u_n existe et $1 \leqslant u_n \leqslant 2$. La propriété P_0 est trivialement vraie, et en supposant la propriété vraie au rang n, u_{n+1} existe puisque la fonction h est bien définie sur $[1, 2]$, et la question précédente assure que $u_{n+1} = h(u_n) \in [1, 2]$.

   (c) On peut procéder par simples encadrements : si $1 \leqslant x \leqslant 2$, $2 - \ln(2) \leqslant 2 - \ln(x) \leqslant 2$, donc $\sqrt{2 - \ln(2)} \leqslant \sqrt{2 - \ln(x)} \leqslant \sqrt{2}$. En particulier, $|\sqrt{2 - \ln(x)}| \geqslant |\sqrt{2 - \ln(2)}| > 1$. On en déduit que $|2x\sqrt{2 - \ln(x)}| > 2$, puisque x est supposé plus grand que 1. En passant à l'inverse, on a donc bien $|h'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

(d) Par définition, $\alpha^2 = 2-\ln(\alpha)$, donc $\alpha = \sqrt{2\ln(\alpha)}$ (tout étant bien positif), soit $\alpha = h(\alpha)$. On peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction h, dont la dérivée est majorée en valeur absolue par $\frac{1}{2}$ sur $[1,2]$, entre les valeurs α (qui appartient à $[1,2]$ comme on l'a prouvé beaucoup plus haut), et u_n (qui appartient aussi à $[1,2]$, comme on l'a prouvé un peu moins haut), ce qui donne $|h(\alpha)-h(u_n)| \leqslant \frac{1}{2}|\alpha - u_n|$, soit $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

(e) Une petite récurrence pour terminer : posons P_n la propriété $|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$. Au rang 0, $|u_0-\alpha| = |1-\alpha| \leqslant 1$ puisque $\alpha \in [1,2]$, donc la propriété P_0 est vérifiée. Supposons désormais P_n vérifiée, alors $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$ (on applique successivement le résultat de la question précédente, puis l'hypothèse de récurrence). Comme $|u_n-\alpha| \geqslant 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}$, le théorème des gendarmes assure alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n-\alpha| = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 4

1. Faisons donc une récurrence, puisqu'on nous le demande si gentiment. Au rang 0, $L + A^0(U_0 - L) = L + U_0 - L = U_0$, donc la propriété est vérifiée. Supposons-la vraie au rang n, alors $U_{n+1} = AU_n + B = A(L + A^n(U_0-L)) + B = AL + A^{n+1}(U_0-L) + B = L + A^{n+1}(U_0-L)$ puisque $L = AL + B$ par hypothèse. D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n.
2. (a) On peut utiliser les colonnes de la matrice B pour affirmer que Im $(b) = \text{Vect}((3,1,2), (-1,0,-1),(-2,-1,-1))$. On constate que la somme des trois vecteurs donne le vecteur nul, on peut donc supprimer le dernier. Tant qu'à faire, remplaçons le deuxième par son opposé, et gardons également la différence du deuxième et du troisième, soit Im $(b) = \text{Vect}((1,0,1),(1,1,0))$. L'équation $-x+y+z=0$, peut se traduire par $x = y+z$, et a pour solutions $\{(y+z,y,z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1,1,0),(1,0,1))$, c'est bien le même sous-espace que Im (b). L'appication id $-a$ admet pour matrice dans la base canonique, à un facteur 6 près qui ne changera pas l'image, $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Là aussi, la somme des trois colonnes est nulle, donc Im (id $-a$) $= \text{Vect}((6,4,2),(-3,0,-3)) = \text{Vect}((3,2,1),(1,0,1))$ quitte à diviser par des constantes. On peut remplacer le premier vecteur par $\frac{1}{2}((3,2,1) - (1,0,1)) = (1,1,0)$ pour retrouver le même base que pour l'espace précédent (et donc la même image).

   (b) Puisqu'on vient de déterminer la matrice de id $-a$ (le noyau est le même que pour $a-$id), il suffit de résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 6x & - & 3y & - & 3z & = & 0 \\ 4x & & & - & 4z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$. La deuxième équation donne immédiatement $x = z$, et la première $2x - y - z = 0$, soit $y = 2x - z = x$. La troisième équation est alors automatiquement vérifiée, donc $\ker(a - \text{id}) = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1,1,1))$.

   (c) Puisque la famille est constituée de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, il suffit de prouver qu'elle est libre. Supposons que $a(1,1,1) + b(1,0,1) + c(0,-1,1) = 0$, alors $a+b = a-c = a+b+c = 0$. On a donc $b = -a$ et $c = a$, ce qui impose $a = 0$ et donc $b = c = 0$. La famille est bien libre, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (d) Il suffit d'écrire les vecteurs en colonne : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On a le choix entre calculer l'inverse P^{-1} de notre matrice de passage et utiliser la formule de changement de base, ou calculer les images de nos trois vecteurs par chacune des applications, et espérer que leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ seront faciles à obtenir. Dans ce corrigé, on utilisera la deuxième méthode, mais l'inverse de P est de toute façon indispensable un peu plus loin. Puisque $a(x,y,z) = \frac{1}{6}(3y+3z, -4x+6y+4z, -2x+3y+5z)$, on obtient $a(u) = \frac{1}{6}(6,6,6) = (1,1,1) = u$; $a(v) = \frac{1}{6}(3,0,3) = \frac{1}{2}v$; et $a(w) = \frac{1}{6}(0,-2,2) = \frac{1}{3}w$. Autrement dit, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. On procède de même pour b : $b(x,y,z) = (3x-y-2z, x-z, 2x-y-z)$, donc $b(u) = (0,0,0)$; $b(v) = (1,0,1) = v$; et $b(w) = (-1,-1,0)$. On constate que $(-1,-1,0) = (0,-1,1) - (1,0,1)$ (et si on ne le constate pas, on trouve les coordonnées de ce vecteur dans la base $\mathcal{B}$ en résolvant un système) pour obtenir $B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. C'est une récurrence classique : la formule de changement de base nous assure que $D = P^{-1}AP$, soit $A = PDP^{-1}$, ce qui prouve la relation au rang 1. Supposons là au rang n, alors $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. La formule est également vraie au rang 0 puisque $PD^0P^{-1} = I = A^0$.
5. On peut facilement écrire $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3^n}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En notant E', F' et G' les trois matrices apparaissant dans l'égalité précédente, on aura $A = P\left(E' + \frac{1}{2^n}F' + \frac{1}{3^n}G'\right)P^{-1} = E + \frac{1}{2^n}F + \frac{1}{3^n}G$, en posant $E = PE'P^{-1}$, et similairement pour F et G. Il va bien falloir se décider à calculer P^{-1}, par exemple en inversant le système défini par la matrice P : $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & a \\ x & & & - & z & = & b \\ x & + & y & + & z & = & c \end{array}\right.$. En soustrayant les équations extrêmes, on trouve tout de suite $z = c - a$, puis à l'aide de la deuxième équation $x = -a + b + c$, et via la première $y = 2a - b - c$, soit $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à calculer $E = PE'P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (calcul vraiment facile ici).
6. Calculons donc (pour changer) : $DL' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}p & \frac{1}{2}q \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}r \end{pmatrix}$, donc $L' = DL' + B$ se traduit par le système de trois équations $\left\{\begin{array}{ccccc} p & = & \frac{1}{2}p & + & 1 \\ q & = & \frac{1}{2}q & - & 1 \\ r & = & \frac{1}{3}r & + & 1 \end{array}\right.$. Même pas de vrai système à résoudre, on trouve simplement $p = 2$, $q = -2$ et $r = \frac{3}{2}$, soit $L' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.
7. Calculons donc $AL + B = APL'P^{-1} + B = PDP^{-1}PL'P^{-1} + PB'P^{-1} = P(DL' + B')P^{-1} = PL'P^{-1} = L$.
8. On constate très facilement que $E'L' = 0$ (non, je n'écris pas le calcul !), donc $EL = PE'P^{-1}PL'P^{-1} = P(E'L')P^{-1} = 0$.

9. D'après la question préliminaire, $U_n = L + A^n(U_0 - L)$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0$, les coefficients de la matrice A^n convergent vers ceux de la matrice E, et ceux de U_n tendent donc vers ceux de $L + E(U_0 - L) = L + EU_0$ vu le résultat de la question précédente.