

Concours Blanc : épreuve de mathématiques

PTSI A et B Lycée Eiffel

27 mai 2015

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

La qualité de la rédaction et le soin apporté à la présentation de la copie seront pris en compte lors de la correction. En particulier, toute tentative de bluff ou résultat affirmé sans justification sera fortement sanctionné.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$. On notera \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

- Étude de la fonction f .
 - Calculer la dérivée f' de la fonction f et étudier son signe.
 - Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
 - Calculer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction f quand x tend vers 0.
 - En déduire une équation de la tangente en 0 à \mathcal{C}_f , ainsi que la position relative de cette tangente et de \mathcal{C}_f au voisinage de 0 (on justifiera rigoureusement ce dernier point).
 - Tracer une allure représentative de \mathcal{C}_f tenant compte de tous les calculs effectués.
- Étude d'une suite récurrente. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - Calculer u_1 et u_2 .
 - Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$.
 - Montrer que la suite (u_n) converge, et préciser sa limite.
- On définit une suite auxiliaire (v_n) par la relation $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.
 - Exprimer v_n en fonction de u_n et en déduire que $2 \leq v_n \leq 2 + \frac{1}{n}$.
 - Montrer par récurrence que, $\forall n \geq 2$, on a l'encadrement $2(n+1) \leq \frac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.
 - À l'aide d'une comparaison entre $\frac{1}{k}$ et $\int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt$, montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$.
- Déduire des questions précédentes que $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

Exercice 2

On note dans tout cet exercice $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, et on pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note f l'application de E dans lui-même définie par $f(M) = JMJ$.

1. Déterminer la matrice représentative A de f dans la base canonique de E .
2. Que vaut $f \circ f$? Que peut-on en déduire sur l'application linéaire f ? Prouver en particulier que f est un automorphisme de E , et donner sa réciproque f^{-1} .
3. Vérifier que $\forall(M, N) \in E^2, f(MN) = f(M)f(N)$.
4. Déterminer une base des espaces vectoriels $F = \ker(f - \text{id})$ et $G = \ker(f + \text{id})$.
5. Soit $M \in E$, montrer qu'il existe un unique couple de matrices (M_1, M_2) , avec $M_1 \in F$ et $M_2 \in G$, telles que $M = M_1 + M_2$. On écrira explicitement les deux matrices M_1 et M_2 . Calculer les matrices M_1 et M_2 lorsque $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
6. Montrer que l'espace vectoriel F est stable par produit matriciel : $\forall(A, B) \in F^2, AB \in F$. Que peut-on dire du produit de deux matrices appartenant à G ?
7. Soient M et N deux matrices de E , déterminer les matrices $(MN)_1$ et $(MN)_2$ en fonction de M_1, M_2, N_1 et N_2 .

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$.

A. Propriétés générales de la fonction f .

1. Justifier rigoureusement que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.
2. Étudier la parité de la fonction f , et en déduire son ensemble d'étude.
3. Calculer $f(0)$ et $f(\sqrt{3})$.
4. Déterminer les limites de f en 1 et en $+\infty$.

B. Variations et courbe de f .

1. Montrer que f est dérivable sur les intervalles $[0, 1[$ et $]1, +\infty[$, et que
$$\begin{cases} f'(x) = 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ f'(x) = -\frac{4}{1+x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
2. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ sur chacun des intervalles du domaine d'étude.
3. Tracer la courbe représentative de la fonction f .

C. Des équations différentielles.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + f'(x)y = 0$ sur chacun des intervalles $[0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
2. (a) Déterminer deux réels a et b tels que, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$.
(b) Résoudre sur l'intervalle $]1, +\infty[$ l'équation différentielle $y' + f'(x)y = \frac{e^{4 \arctan(x)}}{x(x-1)}$.
3. (a) Démontrer que, $\forall t \in \mathbb{R}, \text{sh}^2(t) = \frac{\text{ch}(2t) - 1}{2}$.
(b) En déduire les primitives sur l'intervalle $]1, +\infty[$ de la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ (on posera $x = \text{ch}(t)$).
(c) Résoudre sur ce même intervalle l'équation différentielle $y' + f'(x)y = \sqrt{x^2 - 1}e^{4 \arctan(x)}$.