

Concours Blanc : épreuve de mathématiques

PTSI A et B Lycée Eiffel

26 mai 2014

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

La qualité de la rédaction et le soin apporté à la présentation de la copie seront pris en compte lors de la correction. En particulier, toute tentative de bluff ou résultat affirmé sans justification sera fortement sanctionné.

Exercice 1

Partie I. Étude d'une fonction f .

On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$ si $x > 0$, et $f(0) = 1$.

1. Ecrire le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 2, au voisinage de 0. En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
3. Déterminer une fonction φ telle que, $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$.
4. Étudier les variations de φ sur $]0, +\infty[$, et en déduire le tableau de variations complet de la fonction f .

Partie II. Étude d'une suite.

On introduit désormais la suite (u_n) définie pour tout entier n non nul par $u_n = \int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u} du$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq \frac{1}{e} \ln(n+1)$. En déduire la limite de la suite (u_n) .

2. Expliquer pour l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$ existe, et prouver que

$$0 \leq \int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n \leq \int_0^1 f(x) dx.$$

3. Donner alors un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On effectue une suite de lancers d'une pièce déséquilibrée, donnant Pile avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec probabilité $q = 1 - p$ à chaque lancer. On admet que les différents lancers sont indépendants. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on dit que le k -ème lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k - 1)$ -ème lancer. On note par ailleurs X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers. Ainsi, pour $n = 6$, la suite de lancers $PPFFFP$ contient deux changements, pour $k = 3$ et $k = 6$, donc $X_6 = 2$ dans cet exemple (on notera P et F en lieu et place de Pile et Face pour ne pas surcharger l'énoncé).

1. Donner la loi de X_2 .
2. (a) Donner la loi de X_3 .
(b) Vérifier que $E(X_3) = 4pq$ et que $V(X_3) = 2pq(3 - 8pq)$.
3. (a) Trouver la loi de X_4 .
(b) Calculer $E(X_4)$.
4. On se place désormais dans le cas général.
(a) Exprimer $P(X_n = 0)$ en fonction de p , q et n .
(b) En décomposant l'événement $(X_n = 1)$ en une réunion d'événements incompatibles, montrer que $P(X_n = 1) = \frac{2pq}{q - p}(q^{n-1} - p^{n-1})$.
(c) En distinguant les cas n pair et n impair, exprimer $P(X_n = n - 1)$ en fonction de p et q .
5. On se place pour cette dernière question dans le cas particulier où $p = q = \frac{1}{2}$.
(a) Vérifier que X_3 et X_4 suivent alors une loi binômiale donc on précisera le paramètre.
(b) Prouver plus généralement que X_n suit une loi binômiale dont on précisera le paramètre, l'espérance et la variance.

Exercice 3

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln(x) - 2$. On donne pour tout l'exercice $\ln(2) \simeq 0,7$.

1. (a) Déterminer les variations de la fonction g .
(b) Calculer les limites de g aux bornes de son domaine de définition.
(c) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α , et prouver que $1 < \alpha < 2$.
(d) Déterminer le signe de $g(x)$.
(e) Tracer dans un repère orthonormé une allure de la courbe représentative de g , en faisant notamment apparaître les points d'abscisse 1 et 2.
2. (a) Déterminer la valeur de $\int_1^\alpha \ln(x) dx$.
(b) Montrer que $\int_1^\alpha g(x) dx = \frac{8 - 2\alpha^3}{3} - \alpha$.
3. On souhaite maintenant construire une suite déterminant une valeur approchée de α . On définit pour cela la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{2 - \ln(u_n)}$.
(a) On pose, $\forall x \in [1, 2]$, $h(x) = \sqrt{2 - \ln(x)}$. Déterminer $h'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction h sur $[1, 2]$, et prouver que $h([1, 2]) \subset [1, 2]$.
(b) Montrer que la suite (u_n) est bien définie et qu'on a toujours $u_n \in [1, 2]$.

(c) Prouver que, $\forall x \in [1, 2], |h'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

(d) Montrer que $h(\alpha) = \alpha$, et en déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

(e) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$, en déduire la convergence de (u_n) et la valeur de sa limite.

Exercice 4

On désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ étant données, on suppose qu'il existe une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.

On définit la suite de matrices (U_n) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la manière suivante : $U_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n + B$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $U_n = L + A^n(U_0 - L)$.

Dans la suite de l'exercice on pose $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

On note par ailleurs :

- id l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^3 .
- a l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est A .
- b l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est B .

2. (a) Prouver que le vecteur $u = (x, y, z)$ appartient à l'image de b si et seulement si $-x + y + z = 0$, puis prouver que $\text{Im}(b) = \text{Im}(\text{id} - a)$.

(b) Déterminer une base de $\ker(a - \text{id})$.

(c) Montrer que la famille constituée des vecteurs $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (0, -1, 1)$ est une base de \mathbb{R}^3 , qu'on notera \mathcal{B} dans la suite de l'exercice.

(d) Écrire la matrice de passage P de la base canonique vers la base \mathcal{B} .

3. Écrire la matrice D de l'endomorphisme a ainsi que la matrice B' de l'endomorphisme b dans la base \mathcal{B} .

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. En écrivant D^n comme la somme de trois matrices diagonales judicieusement choisies, prouver l'existence de trois matrices E, F, G indépendantes de n telles que pour tout entier naturel n , $A^n = E + \frac{1}{2^n}F + \frac{1}{3^n}G$. Expliciter la matrice E (mais pas les autres) sous forme de tableau de nombres.

6. Déterminer par le calcul, une matrice L' de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$ telle que $L' = DL' + B'$.

7. Montrer que la matrice $L = PL'P^{-1}$ vérifie $L = AL + B$ (on peut faire cette question sans avoir répondu à la précédente).

8. Établir que $EL = 0$.

9. Montrer que chacun des coefficients de la matrice U_n a pour limite, lorsque n tend vers $+\infty$, les coefficients de la matrice $EU_0 + L$.