# AP9 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

27 mars 2015

## Exercice 1

1. $F$ est défini par une équation linéaire homogène, et $G$ comme un Vect, ce sont donc des sous-espaces vectoriels. De plus, si $u \in G$, alors $u = (a, a, a)$, et $u$ ne peut appartenir également à $F$ que si $a - a + a = 0$, soit $a = 0$. Autrement dit, $F \cap G = \{0\}$. De plus, $\dim(G) = 1$, et comme $F = \mathrm{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$ (on peut le décrire par la condition $y = x + z$), $\dim(F) = 2$. On en déduit que $\dim(F)+\dim(G) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, ce qui suffit à affirmer qu'ils sont supplémentaires. On cherche ensuite à écrire $(1, 2, 3) = a(1, 1, 0)+b(0, 1, 1)+c(1, 1, 1) = (a+c, a+b+c, b+c)$. En soustrayant les deux premières coordonnées, on trouve immédiatement $b = 1$, et en soustrayant les deux dernières $a = -1$. Reste à constater que $c = 2$, soit $(1, 2, 3) = (-1, -1, 0) + (0, 1, 1) + (2, 2, 2) = (-1, 0, 1) + (2, 2, 2)$.
2. Bourrinons : si on écrit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, alors $P(0) = 0$ implique $d = 0$, puis $\displaystyle\int_0^1 P(t)\, dt = \int_0^1 at^3 + bt^2 + ct\, dt = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2}$, qui doit donc être nul. On peut par exemple décrire cette deuxième condition par l'équation $a = -\frac{4}{3}b - 2c$. Notre ensemble peut donc être décrit sous la forme $\left\{\left(-\frac{4}{3}b - 2c\right) X^3 + bX^2 + cX\right\} = \mathrm{Vect}\left(-\frac{4}{3}X^3 + X^2, -2X^3 + X\right)$.
3. Les deux premiers vecteurs de la famille n'étant manifestement pas proportionnels, on cherche donc à écrire le troisième comme combinaison linéaire des deux précédents, autrement dit $(1, -3, a, b) = x(-3, -2, -1, 3)+y(1, 0, 2, 4)$. Les deux premières coordonnées donnent les conditions $-3x + y = 1$ et $-2x = -3$, soit $x = \frac{3}{2}$ et $y = 1 + 3x = \frac{11}{2}$. On a alors $a = -x + 2y = \frac{19}{2}$ et $b = 3x + 4y = \frac{53}{2}$. Oui, je sais, c'est palpitant.
4. La famille étant constituée de trois polynômes dans un espace vectoriel de dimension 3, il suffit de prouver qu'elle est libre ou génératrice. Pour une fois, on va plutôt prouver qu'elle est génératrice, comme ça on n'aura plus rien à faire pour la deuxième question. Soit donc un polynôme $P = a + bx + cX^2$ qu'on souhaite écrire sous la forme $x(X^2 + 1) + y(3X^2 - X + 3) + z(X^2 - X + 1)$, on obtient le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & + & z & = & c \\ & - & y & - & z & = & b \\ x & + & 3y & + & z & = & a \end{array}\right.$. Manifestement, le système ne peut avoir de solutions que si $a = c$, donc l'énoncé de l'exercice est faux !

## Exercice 2

1. La méthode la plus rapide est de multiplier deux DL vus en cours : $\arctan(x) \times \frac{1}{1 + x^2} = \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)(1 - x^2 + o(x^3)) = x - x^3 - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$. Les plus tordus

passeront par la promitive de $\frac{\arctan(x)}{1+x^2}$, qui est égale à $\frac{1}{2}\arctan^2(x)$.

2. On écrit par exemple $\frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{2-x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1+2x}{1-\frac{x}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((1+2x)\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}+o(x^3)\right)\right)^{\frac{1}{2}} =$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}+2x+x^2+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{5}{2}x+\frac{5}{4}x^2+\frac{5}{8}x^3+o(x^3)\right)^{\frac{1}{2}}$. En posant $u = \frac{5}{2}x+\frac{5}{4}x^2+\frac{5}{8}x^3+o(x^3)$, on peut donc écrire $\frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{2-x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\frac{1}{16}u^3+o(u^3)\right) =$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{5}{4}x+\frac{5}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3-\frac{25}{32}x^2-\frac{25}{32}x^3+\frac{125}{128}x^3+o(x^3)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{5}{4\sqrt{2}}x-\frac{5}{32\sqrt{2}}x^2+$ $\frac{65}{128\sqrt{2}}x^3+o(x^3)$.

3. On passe sous forme exponentielle pour commencer, notons $f(x)$ ce qui se trouve alors dans l'exponentielle, soit $f(x) = \frac{1}{e^x-1}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = \frac{1}{x+o(x)}\ln\left(\frac{x+\frac{x^2}{2}+o(x)}{x}\right) = \frac{1}{x}\times\frac{1}{1+o(1)}\times$ $\ln\left(1+\frac{x}{2}+o(x)\right) \sim \frac{1}{x}\times 1\times\frac{x}{2}\sim\frac{1}{2}$. La limite initialement recherchée vaut donc $\sqrt{e}$.

4. $\frac{\cos(x)}{1+\ln(1+x)} = \frac{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}{1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)} = \left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)(1-u+u^2-u^3+o(u^3))$, en posant $u = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$. On obtient donc $\frac{\cos(x)}{1+\ln(1+x)} = \left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+x^2-x\right.$ $\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\left(1-x+\frac{3}{2}x^2-\frac{7}{3}x^3+o(x^3)\right) = 1-x+\frac{3}{2}x^2-\frac{7}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3) =$ $1-x+x^2-\frac{11}{6}x^3+o(x^3)$.

5. Il suffit de faire le $DL_2$ en 0 de $f$ : $f(x) = \frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x} = -\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. La fonction est donc prolongeable en 0 en posant $f(0)=0$, elle y admet pour tangente la droite d'équation $y = -\frac{x}{2}$, et elle est localement située au-dessus de sa tangente.

6. Commençons par poser $h = x-1$ : $f(h) = \frac{\ln^2(1-h)}{(h+1)^2+a(h+1)+b} = \frac{h^2+o(h^2)}{1+a+b+(2+a)h+h^2}$. Pour avoir une limite non nulle, il suffit donc d'imposer $1+a+b = 2+a = 0$, soit $a=-2$ et $b=1$ (la limite sera alors égale à 1).

7. On commence bien sûr par poser $X = \frac{1}{x}$, pour obtenir $f(X) = \left(\frac{1}{X^2}\left(\frac{1}{X}-2\right)\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1-2X}{X^3}\right)^{\frac{1}{3}} =$ $\frac{1}{X}(1-2X)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{X}\left(1+\frac{1}{3}(-2X)-\frac{1}{9}(-2X)^2+o(X^2)\right) = \frac{1}{X}-\frac{2}{3}-\frac{4}{9}X+o(X)$. Autrement dit, $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x-\frac{2}{3}-\frac{4}{9x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$. La fonction admet donc en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = x-\frac{2}{3}$, et sa courbe se situe localement en-dessous de cette asymptote.