

AP : Séance n°9

PTSI B Lycée Eiffel

27 mars 2015

Exercice 1

Quelques petits exercices sur les espaces vectoriels :

1. Dans \mathbb{R}^3 , on note $F = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Montrer que F et G sont supplémentaires, et déterminer la décomposition du vecteur $(1, 2, 3)$ dans cette somme directe.
2. Montrer que l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(0) = 0$ et $\int_0^1 P(t) dt = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$, et en donner une base.
3. On considère la famille $((-3, -2, -1, 3); (1, 0, 2, 4); (1, -3, a, b))$ de vecteurs de \mathbb{R}^4 . Déterminer pour quelles valeurs de a et b la famille est liée.
4. Montrer que la famille $(X^2 + 1, 3X^2 - X + 3, X^2 - X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}^2[X]$ et déterminer les coordonnées des polynômes de la base canonique dans cette base.

Exercice 2

Quelques calculs sur les fonctions :

1. Calculer le $DL_3(0)$ de $\frac{\arctan(x)}{1+x^2}$.
2. Calculer le $DL_3(0)$ de $\frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{2-x}}$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}}$.
4. Calculer le $DL_3(0)$ de $\frac{\cos(x)}{1 + \ln(1+x)}$.
5. On pose $f(x) = \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$, prolonger f par continuité en 0 et donner l'équation de la tangente, ainsi que la position relative de la courbe et de sa tangente en 0.
6. Déterminer a et b tels que $\frac{\ln^2(2-x)}{x^2 + ax + b}$ admette une limite non nulle quand x tend vers 1.
7. Étudier le comportement en $+\infty$ (asymptote, position de la courbe par rapport à l'asymptote) de $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^2(x-2)}$.