AP n°8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

16 janvier 2015

Exercice 1

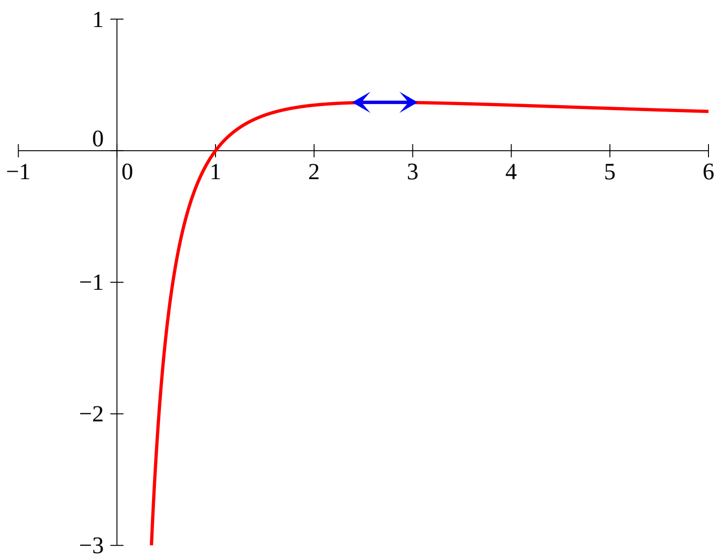
1. Le plus logique ici est de faire le changement de variable $Y = X^2$ pour se ramer au polynôme du second degré $Y^2 + Y - 6$. Ce dernier a pour discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25$, et admet donc deux racines réelles $Y_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2$, et $Y_2 = \dfrac{-1-5}{2} = -3$. Autrement dit, $Y^2 + Y - 6 = (Y-2)(Y+3)$, soit $P_1 = (X^2-2)(X^2+3) = (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X-\sqrt{3}i)(X+\sqrt{3}i)$.
2. Ici, on peut factoriser en utlisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Comment ça, il y a un plus et pas à moins ? Ce n'est pas grave, $+1$ c'est la même chose que $-i^2$! On écrit donc $P_2 = (X^2 - X + 1)^2 - i^2 = (X^2 - X + 1 + i)(X^2 - X + 1 - i)$. Reste à factoriser chacun des trinomes, et donc à résoudre deux équations de degré 2 à coefficients complexes. Commençons par exemple par $X^2 - X + 1 + i = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 - 4(1+i) = -3 - 4i$. Cherchons un nombre complexe $\delta = a + ib$ vérifiant $\delta^2 = \Delta$. On obtient classiquement les trois équations $a^2 - b^2 = -3$ (partie réelle), $2ab = -4$ (partie imaginaire), et $a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{9+16} = 5$. Comme d'habitude, on fait la somme et la différence des équations extrêmes pour obtenir $2a^2 = 2$, soit $a = \pm 1$, et $2b^2 = 8$, soit $b = \pm 2$. Comme a et b sont de signe contraire, on peut prendre $\delta = 1 - 2i$, pour trouver $x_1 = \dfrac{1+1-2i}{2} = 1 - i$, et $x_2 = \dfrac{1-1+2i}{2} = i$. On recommence avec la deuxième équation $X^2 - X + 1 - i = 0$. Cette fois-ci le discriminant vaut $\Delta = 1 - 4(1-i) = -3 + 4i$. Par rapport à la résolution précédente, seul le signe de ab va changer, on trouvera donc $\delta = 1 + 2i$, puis $x_3 = \dfrac{1+1+2i}{2} = 1 + i$, et $x_4 = \dfrac{1-1-2i}{2} = -i$. en fait, on savait déjà que le polynôme P_2 qui est à coefficients réels aurait nécessairement pour racines les conjugués de x_1 et x_2, on aurait pu éviter ce calcul. Conclusion : $P_2 = (X-i)(X+i)(X-1-i)(X-1+i)$ dans $\mathbb{C}[X]$, ou $P_2 = (X^2+1)(X^2-2X+2)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Il s'agit simplement de calculer les racines sixième complexes du nombre -4. On pose donc $z = re^{i\theta}$, et $-4 = 4e^{i\pi}$, puis on écrit l'égalité des modules et des arguments pour obtenir $r^6 = 4$ et $6\theta \equiv \pi[2\pi]$, soit $r = 2^{\frac{1}{3}}$, et $\theta \equiv \dfrac{\pi}{6}\left[\dfrac{\pi}{3}\right]$. En notant pour simplifier $a = \sqrt[3]{2}$, on en déduit les six racines du polynôme : $z_1 = ae^{i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} + \dfrac{a}{2}i$; $z_2 = ae^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3})} = ae^{i\frac{\pi}{2}} = ai$; $z_3 = ae^{i\frac{5\pi}{6}} = -\dfrac{a\sqrt{3}}{2} + \dfrac{a}{2}i$; $z_4 = -z_1$; $z_5 = -z_2$ et $z_6 = -z_3$ (on aurait pu poser $Y = X^2$ dès le départ pour se contenter de calculer des racines cubiques et prendre les opposés pour compléter ensuite). L'écriture de la factorisation n'a absolument aucun intérêt.

Exercice 2

1. Calculons donc : $I_0 = \int_0^1 e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^1 = -\frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{1}{e}$. Ensuite, on procède par IPP, en posant $u'(x) = e^{-x}$, donc $u(x) = -e^{-x}$, et $v(x) = x$ pour trouver $v(x) = 1$. Ce qui donne $I_1 = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = -\frac{1}{e} + I_0 = 1 - \frac{2}{e}$. De même pour I_2, on primitive le e^{-x} et on dérive le x^2 pour trouver $I_2 = [-x^2e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2xe^{-x}\,dx = -\frac{1}{e} + 2I_1 = 2 - \frac{5}{e}$.
2. Là encore, on fait une IPP en posant $u'(x) = e^{-x}$, et $v(x) = x^{n+1}$ qui donne $v'(x) = (n+1)x^n$, et on trouve $I_{n+1} = [-x^{n+1}e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 (n+1)x^ne^{-x}\,dx = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$.
3. On peut procéder directement par inégalités : sur l'intervalle $[0,1]$, $x^{n+1} \leqslant x^n$, donc $x^{n+1}e^{-x} \leqslant x^ne^{-x}$ (on multiplie par un réel positif). Il ne reste plus qu'à intégrer pour trouver $I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite (I_n) est donc décroissante.
4. Comme I_n est l'intégrale d'une fonction positive, $I_n \geqslant 0$. La suite est donc décroissante minorée par 0, elle converge. reste à la majorer pour obtenir sa limite. On peut simplement constater que, $\forall x \in [0,1]$, $e^{-x} \leqslant 1$, donc $I_n \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. D'après le théorème des gendarmes, l'encadrement $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ permet de concliure que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 3

1. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, avec $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$ (non, non, pas de forme indéterminée), et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (croissance comparée). On calcule aussi $g'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$, g est donc croissante sur $]0,e]$ et décroissante ensuite, avec un maximum de valeur $g(e) = \frac{1}{e}$. Inutile de fair un tableau de variations, on va tout de suite tracer la courbe :



2. L'équation de point fixe de f s'écrit $e^{ax} = x$, soit $ax = \ln(x)$ (elle ne peut pas avoir de solution négative), ou encore $a = \dfrac{\ln(x)}{x}$, c'est-à-dire $g(x) = a$. Les points fixes de f sont donc les antécédents de a par la fonction g. Celle-ci étant bijective de $]0, e]$ vers $\left]-\infty, \dfrac{1}{e}\right]$, puis de $[e, +\infty[$ vers $\left]0, \dfrac{1}{e}\right]$, le réel a admet deux antécédents si $0 < a < \dfrac{1}{e}$ (la fonction f aura donc deux points fixes), aucun antécédent si $a > \dfrac{1}{e}$ (pas de point fixe pour f), et exactement un antécédent si $a = \dfrac{1}{e}$, ou si $a \leqslant 0$.

3. (a) On peut procéder simplement par récurrence, en notant P_n la propriété : « $u_n \leqslant u_{n+1}$ ». Au rang 0, on a $u_0 = 0$, et $u_1 = e^{au_0} = 1$, donc P_0 est vraie. Supposons P_n vraie, alors $u_n \leqslant u_{n+1}$, donc $au_n \leqslant au_{n+1}$ (a étant supposé positif), et la croissance de l'exponentielle assure que $e^{au_n} \leqslant e^{au_{n+1}}$, soit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$. L'hérédité est donc prouvée, et la suite (u_n) est croissante.

   (b) Dans le cas où $a > \dfrac{1}{e}$, la fonction f n'a pas de point fixe, et la suite récurrente (u_n) ne peut donc pas être convergente. Puisqu'elle est croissante, elle ne peut donc pas être majorée, et diverge nécessairement vers $+\infty$.

   (c) Montrons que l'intervalle $[0, e]$ est stable par la fonction f : $f(0) = 1 \leqslant e$, $f(e) = e^{ae}$, avec $ae \leqslant \dfrac{1}{e} \times e = 1$, donc $f(e) \leqslant e$. La fonction f étant croissante, l'intervalle est bien stable. Une récurrence débile permet alors de prouver que $u_n \leqslant e$. C'est vrai pour u_0, et si $u_n \in [0, e]$, alors $u_{n+1} \in [0, e]$ par stabilité de l'intervalle. Cette fois-ci, la suite est croissante et majorée, elle converge donc.

4. (a) Il suffit ici aussi de prouver que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f. Désormais, f est décroissante sur $\mathbb{R}$, $f(0) = 1$ et $f(1) > 0$, donc l'intervalle est stable. Même récurrence que ci-dessus pour conclure.

   (b) Les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont aussi des suites récurrentes, mais pour la fonction $f \circ f$. Vérifions que toutes suite (v_n) telle que $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ est monotone. On va à nouveau procéder par récurrence. Au rang 0, on aura soit $v_0 \leqslant v_1$, soit $v_0 \geqslant v_1$, mettons-nous par exemple dans le premier cas (le second est identique), on prend alors comme hypothèse de récurrence que $v_n \leqslant v_{n+1}$, et on écrit $f(v_n) \geqslant f(v_{n+1})$ (puisque f est décroissante) puis $f(f(v_n)) \geqslant f(f(v_{n+1}))$, et on obtient bien $v_{n+1} \leqslant v_{n+2}$, ce qui prouve l'hérédité. Les deux suites étudiées étant bornées et monotones, elles convergent nécessairement.

   (c) Partons de $e^{ae^{ax}} = x$, et passons une première fois au ln pour obtenir $ae^{ax} = \ln(x)$, soit $e^{ax} = \dfrac{\ln(x)}{a}$, puis une deuxième fois pour trouver $ax = \ln\left(\dfrac{\ln(x)}{a}\right)$, ce qui donne bien la condition $h(x) = 0$.

   (d) Puisqu'on nous le demande si gentiment, dérivons (notons en passant que la fonction h est effectivement définie sur $]0, 1[$, puisqu'on a alors $\ln(x) < 0$, donc $\dfrac{\ln(x)}{a} > 0$). On écrit $h(x) = ax - \ln(-\ln(x)) + \ln(-a)$, et on calcule d'abord $h'(x) = a - \dfrac{1}{x\ln(x)}$, puis $h''(x) = \dfrac{\ln(x) + 1}{(x\ln(x))^2}$. La fonction h' est donc décroissante sur $\left]0, \dfrac{1}{e}\right]$ et croissante sur

$\left[\dfrac{1}{e}, 1\right[$. Elle admet pour minimum $h'\left(\dfrac{1}{e}\right) = a - \dfrac{1}{\frac{1}{e} \times (-1)} = a + e$. Puisqu'on a supposé que $-e \leqslant a$, ce minimum est positif, et la fonction h' est positive sur $]0, 1[$. La fonction h est donc continue et strictement croissante sur $]0, 1[$, elle y est bijective. Oui, mais vers quel intervalle ? Il suffit de calculer $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée), et $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = +\infty$. La fonction h est donc bijective de $]0, 1[$ vers $\mathbb{R}$ tout entier, et s'annule en particulier une unique fois. Autrement dit, $f \circ f$ admet un unique point fixe dans ce cas. Les suites récurrentes (u_{2n}) et (u_{2n+1}), qui sont convergentes, convergent donc toutes les deux vers cet unique point fixe. La suite (u_n) converge alors elle aussi vers ce point fixe.