AP : Séance n°8

PTSI B Lycée Eiffel

16 janvier 2015

Exercice 1

Factoriser le plus complètement possible les polynomes suivants :

1. $P_1 = X^4 + X^2 - 6$
2. $P_2 = (X^2 - X + 1)^2 + 1$
3. $P_3 = X^6 + 4$

Exercice 2

On considère la suite d'intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\, dx$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Déterminer plus généralement une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
3. Déterminer la monotonie de la suite (I_n).
4. Prouver que (I_n) converge, et déterminer sa limite.

Exercice 3

On considère une suite récurrente (u_n) telle que $u_0 = 0$ et vérifiant la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = e^{ax}$ (a est un réel quelconque).

1. Étudier le plus complètement possible la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.
2. Déterminer le nombre de points fixes de la fonction f en fonction de la valeur de a.
3. On suppose dans cette question que $a \geqslant 0$.
   (a) Montrer que, dans ce cas, la suite (u_n) est croissante.
   (b) Montrer que, si $a > \dfrac{1}{e}$, (u_n) a pour limite $+\infty$.
   (c) Montrer que, si $0 \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{e}$, la suite (u_n) est majorée par e. Que peut-on en déduire sur sa nature ?
4. On suppose dans cette question que $a < 0$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) prend toutes ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$.
   (b) Montrer que les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et convergentes.
   (c) Montrer que, $\forall x \in]0, 1[$, $f(f(x)) = x \Leftrightarrow h(x) = 0$, en posant $h(x) = ax - \ln\left(\dfrac{\ln(x)}{a}\right)$.
   (d) On suppose que $-e \leqslant a < 0$. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0, 1]$ (on pourra dériver deux fois la fonction h), et conclure quand à la nature de la suite (u_n).