AP6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

16 janvier 2015

Exercice 1

Première méthode : on calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$, puis on constate que $A^2 = 6A - 8I$. On prouve alors par récurrence que $A^n = a_nA + b_nI$. C'est vrai au rang 0 en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, et en supposant la propriété vraie au rang n, on peut écrire $A^{n+1} = A \times A^n = A(a_nA + b_nI) = a_nA^2 + b_nA = (6a_n + b_n)A - 8a_nI$ en utilisant la relation obtenue plus haut. On en déduit que la propriété est vraie au rang $n+1$ (et donc pour tout entier n), mais aussi que $a_{n+1} = 6a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -8a_n$. En découle la relation $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n$. La suite (a_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 6x + 8 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 36 - 32 = 4$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{6-2}{2} = 2$, et $x_2 = \dfrac{6+2}{2} = 4$. On peut donc écrire $a_n = \alpha 2^n + \beta 4^n$, avec $a_0 = \alpha + \beta = 0$, et $a_1 = 2\alpha + 4\beta = 1$. On en déduit que $-2\alpha = 1$, soit $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, et $\beta = \dfrac{1}{2}$. Autrement dit, $a_n = \dfrac{4^n - 2^n}{2} = 2^{2n-1} - 2^{n-1}$. On obtient ensuite $b_n = -8a_{n-1} = -8(2^{2n-3} - 2^{n-2}) = 2^{n+1} - 2^{2n}$. Il ne reste plus qu'à conclure : $A^n = (2^{2n-1} - 2^{n-1})A + (2^{n+1} - 2^{2n})I = \begin{pmatrix} 2^{2n-1} + 2^{n-1} & 2^{2n-1} - 2^{n-1} \\ 2^{2n-1} - 2^{n-1} & \end{pmatrix}$.

Deuxième méthode : on écrit $A = 2I + J$, où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule sans problème $J^2 = 2J$, puis $J^3 = 4J$, et on prouve par récurrence que, si $n \geqslant 1$, $J^n = 2^{n-1}J$ (en effet, si c'est vrai au rang n, alors $J^{n+1} = J \times J^n = 2^{n-1}J^2 = 2^nJ$). Les matrices I et J commutant, on peut appliquer la formule du binôme de Newton : $A^n = (J + 2I)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (2I)^{n-k}$. Il faut isoler le terme numéro 0 (qui est simplement égal à I) avant de remplacer les puissances de J par la formule prouvée précédemment : $A^n = 2^nI + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1}2^{n-k}J = 2^nI + 2^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\right) J = 2^nI + 2^{n-1}(2^n - 1)J = 2^nI + (2^{2n-1} - 2^{n-1})J$. On retrouve évidemment la même matrice que par la première méthode.

Exercice 2

Sans chercher à faire un pivot très règlementaire, on effectue l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ pour obtenir l'équation $2my + 2mz = m - 2m^2$; ainsi que l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - mL_3$ pour trouver $(1-2m)y + (1-2m)z = 2m^2 - m$. La somme des deux équations obtenues donne alors immédiatement $y + z = 0$. Si on réintri=oduit cette condition dans le système initial, on trouve les équations $mx = m^2$; $mx = m - m^2$ et $x = 1 - m$. Si $m = 0$, on trouve donc $x = 1$, et les solutions du système sont de la forme $(1, y, -y)$, avec y variant dans $\mathbb{R}$. Si $m \neq 0$, on doit avoir $x = 1$ et $x = 1 - m$, ce qui est impossible.

Exercice 3

1. Il y a trois couleurs possibles pour chaque case, avec répétitions possibles et ordre important, soit $3^9 = 19\ 683$ coloriages distincts.

2. Il ne reste plus que cinq cases à colorier : $3^5 = 243$ possibilités.
3. Il n'y a plus que deux couleurs pour chaque case : $2^9 = 512$ coloriages.
4. On choisit d'abord les trois cases vertes parmi les neuf disponibles, puis les trois rouges parmi les six qui restent, et on n'a plus le choix pour les bleues (trois parmi trois si on y tient) : $\binom{9}{3} \times \binom{6}{3} \times \binom{3}{3} = \dfrac{9! \times 6!}{6! \times 3!^3} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{3^3 \times 2^3} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 2 = 1\ 680$ coloriages.
5. Il faut choisir l'ordre des couleurs pour chaque ligne, ce qui peut se faire de $3! = 6$ façons, soit $6^3 = 216$ coloriages au total.
6. Pas vraiment de solution élégante : soit on met quatre bleues et cinq rouges, soit quatre bleues, quatre rouges et une verte, soit quatre bleues, trois rouges et deux vertes : $\binom{9}{4} + \binom{9}{4} \times \binom{5}{4} + \binom{9}{4} \times \binom{5}{3} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2}(1 + 5 + 10) = 126 \times 16 = 2\ 016$.
7. C'est une horreur ! Commençons par les cas où la case centrale est bleue :
   - si les quatre cases sur les côtés (celles qui ne sont ni au centre ni dans les coins) sont bleues, on est obligés de mettre quatre coins verts ou bleus, $2^4 = 16$ coloriages.
   - si trois côtés sont bleus, le quatrième côté est vert et les quatre coins sont bleus ou verts, il faut aussi choisir le côté vert, $4 \times 16 = 64$ coloriages.
   - si deux côtés sont bleus (et les deux autres verts), soit ils sont adjacents (quatre possibilités), et trois coins sont verts ou bleus, le quatrième (celui entre les deux côtés verts) est de couleur quelconque, $4 \times 2^3 \times 3 = 96$ coloriages ; soit les deux côtés bleus sont opposés (deux possibilités) et les quatre coins sont verts ou bleus, $2 \times 2^4 = 32$ coloriages.
   - si un seul côté est bleu, il faut le choisir, et deux coins sont verts ou bleus (ceux qui sont à côté du côté bleu), les deux autres de couleur quelconque, soit $4 \times 2^2 \times 3^2 = 144$ coloriages.
   - si les quatre côtés sont verts, on choisit les quatre coins comme on veut : $3^4 = 81$ coloriages.

   On en est déjà à $16 + 64 + 96 + 32 + 144 + 81 = 433$ coloriages avec un centre bleu. Le nombre de coloriages avec un centre rouge est aussi de 433 par symétrie. Restent à compter les cas avec un centre vert :
   - avec quatre côtés verts, 81 cas.
   - avec quatre côtés bleus ou quatre rouges, un seul cas à chaque fois (les coins sont tous de l'autre couleur), soit 2 cas.
   - avec trois verts et un rouge, on choisit le côté rouge, deux coins sont verts ou bleus, et deux tricolores, 144 cas.
   - encore 144 avec trois verts et un bleu.
   - avec trois rouges et un vert, on choisit le vert, et les quatre coins sont verts ou rouges, 64 cas.
   - encore 64 cas avec trois bleus et un vert.
   - avec trois rouges et un bleu, on choisit le bleu, deux coins sont nécessairement verts, les deux autres rouges ou verts, 16 cas.
   - encore 16 cas avec trois bleus et un rouge.
   - avec deux verts et deux bleus, $96 + 32 = 128$ cas (cf le même cas quand le centre est bleu).
   - encore 128 cas avec deux verts et deux rouges.
   - avec deux rouges et deux bleus, deux cas où les deux rouges sont opposés (les coins sont alors forcément verts), et 16 où les rouges sont adjacents (quatre placements possibles pour les deux côtés rouges, deux coins sont forcément verts, les deux autres ont deux couleurs possibles).
   - avec deux verts, un rouge et un bleu : 64 cas si les deux verts sont opposés (deux placements des verts, deux possibilités pour les deux côtés restants, et encore deux choix pour chaque coin) ; et 96 où ils sont adjacents (quatre placements des deux verts, deux possibilités pour les côtés restants, un coin forcément vert, deux qui ont deux choix de couleur, et le dernier tricolore).

- avec deux rouges, un vert et un bleu : 16 si les deux rouges sont opposés (quatre possiblités pour placer les côtés, et deux coins bicolores, les deux autres sont forcément verts), et 64 cas s'ils sont adjacents (huit choix pour les côtés, huit pour les trois coins bicolores).
- avec deux bleus, un vert et un rouge : 80 comme ci-dessus.

Ce qui nous fait 1 125 cas à case centrale verte, et 1991 au total (si je ne me suis pas planté, ce qui est à vrai dire assez peu probable !).