AP n°5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

28 novembre 2014

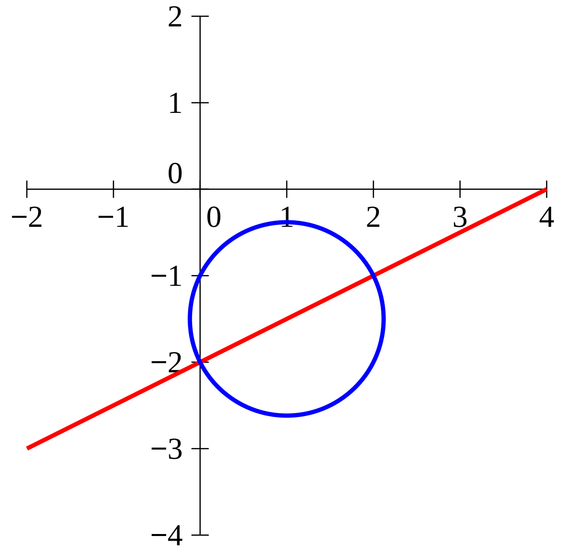
Exercice 1

1. (a) Il faut calculer $\dfrac{x-2+i(y+1)}{x+i(y+2)} = \dfrac{(x-2+i(y+1))(x-i(y+2))}{x^2+(y+2)^2}$ $= \dfrac{x^2-2x+y^2+3y+2+i(xy+x-xy-2x+2y+4)}{x^2+(y+2)^2}$. Autrement dit $\mathrm{Re}\,(Z) = \dfrac{x^2-2x+y^2+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$ et $\mathrm{Im}\,(Z) = \dfrac{2y-x+4}{x^2+(y+2)^2}$.

   (b) i. L'ensemble E correspond aux valeurs de z pour lesquelles $2y-x+4=0$, c'est-à-dire aux points du plan situés sur la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2} - 2$.

   ii. De même, l'ensemble F est défini par l'équation $x^2-2x+y^2+3y+2=0$. On reconnait une équation de cercle qu'on factorise sous la forme $(x-1)^2-1+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+2=0$, soit $(x-1)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$. Il s'agit du cercle de centre $B\left(1,-\dfrac{3}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

   (c) On note en passant que le point d'intersection de ces deux ensembles est le point d'affixe $z = 2-i$, ce qui est cohérent puisque cette valeur est la seule pour laquelle $f(z)=0$.



2. On calcul $|f(z)-1|\times|z+2i| = \left|\dfrac{z-2+i}{z+2i}-1\right|\times|z+2i| = \left|\dfrac{z-2+i-z-2i}{z+2i}\right|\times|z+2i| = |-2-i| = \sqrt{5}$. Or, quand z parcourt le cercle décrit par l'énoncé, on a par définition $|z+2i| = \sqrt{5}$, donc en reprenant le calcul précédent $|f(z)-1| = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$, ce qui signifie que Z se trouve sur un cercle de centre C d'affixe 1 et de rayon 1.

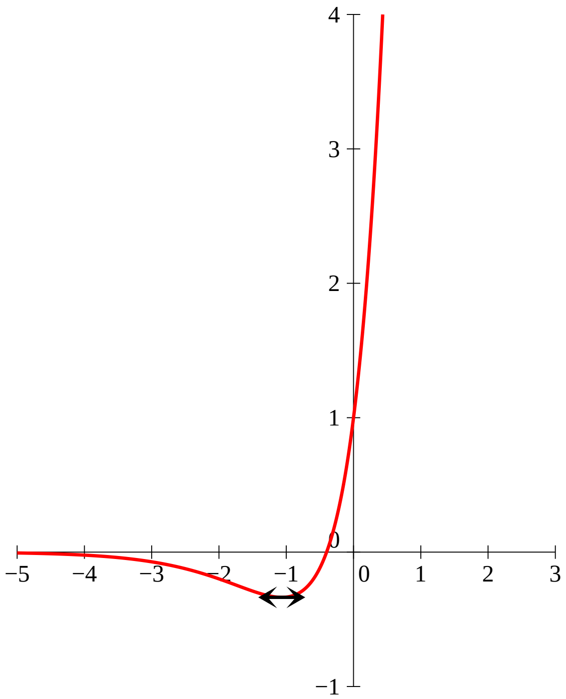
Exercice 2

1. Les solutions homogènes sont de la forme $y_h(x) = Ke^{\frac{3}{2}x}$.
2. Puisqu'on a des coefficients constants et un second membre particulier, on peut chercher directement $y_p(x) = (ax+b)e^{\frac{3}{2}x}$ (on est dans le cas où il faut augmenter le degré du polynôme). On calcule alors $y_p'(x) = \left(\dfrac{3}{2}ax+\dfrac{3}{2}b+a\right)e^{\frac{3}{2}x}$, puis $2y_p'(x)-3y_p(x) = 2ae^{\frac{3}{2}x}$. On obtient l'unique condition $a = \dfrac{5}{2}$ (on peut choisir b comme on veut), soit $y_p(x) = \dfrac{5}{2}xe^{\frac{3}{2}x}$, puis pour les solutions complètes $y(x) = \left(\dfrac{5}{2}x+K\right)e^{\frac{3}{2}x}$.

   Autre possibilité : faire varier la constante en posant $y_p(x) = K(x)e^{\frac{3}{2}x}$, soit $y_p'(x) = K'(x)e^{\frac{3}{2}x} + \dfrac{3}{2}K(x)e^{\frac{3}{2}x}$, ce qui donne la condition $2K'(x) = 5$, et mène à $K(x) = \dfrac{5}{2}x$, puis à la même conclusion.
3. Pour avoir $y(0) = 1$, on doit vérifier $K = 1$, donc $g(x) = f(x)$ (fonction définie à la question suivante).
4. On pose $f(x) = \left(1+\dfrac{5}{2}x\right)e^{\frac{3}{2}x}$.

   (a) On calcule sans grand effort $f'(x) = \left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{15}{4}x+\dfrac{5}{2}\right)e^{\frac{3}{2}x} = \left(\dfrac{15}{4}x+4\right)e^{\frac{3}{2}x}$. Cette dérivée s'annule pour la superbe valeur $x = -\dfrac{16}{15}$, et f admet en ce point un minimum de valeur $f\left(-\dfrac{16}{15}\right) = \left(1-\dfrac{8}{3}\right)e^{-\frac{8}{5}} = -\dfrac{5}{3}e^{-\frac{8}{5}}$. Bien entendu, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ par croissance comparée.

   (b) Pas grand chose à ajouter à ce qui a déjà été dit :



(c) Calculons via une simple IPP, en posant $u(t) = 1 + \frac{5}{2}t$, soit $u'(t) = \frac{5}{2}$; et $v'(t) = e^{\frac{3}{2}t}$, donc $v(t) = \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}t}$. On obtient $\int_0^{\frac{2}{3}} f(t)\,dt = \left[\frac{2}{3}\left(1 + \frac{5}{2}t\right)e^{\frac{3}{2}t}\right]_0^{\frac{2}{3}} - \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{5}{3}e^{\frac{3}{2}t}\,dt = \frac{16}{9}e - \frac{2}{3} - \frac{10}{9}[e^{\frac{3}{2}t}]_0^{\frac{2}{3}} = \frac{16}{9}e - \frac{2}{3} - \frac{10}{9}e + \frac{10}{9} = \frac{2}{3}e + \frac{4}{9}$.

Exercice 3

1. Puisqu'on nous le suggère gentiment, posons $y(t) = z(t)e^{2t}$ (ce qu'on peut toujours faire), ce qui donne $y'(t) = (2z(t) + z'(t))z^{2t}$, puis $y''(t) = (4z(t) + 4z'(t) + z''(t))e^{2t}$. En reportant dans l'équation de départ, on trouve alors l'équation équivalente $e^{2t}(4z(t) + 4z'(t) + z''(t) - 8z(t) - 4z'(t) + 4z(t)) = \frac{e^{2t}}{t^2}$, soit $z''(t) = \frac{1}{t^2}$, ce qui est effectivement nettement plus sympathique. Deux solutions à partir de ce point : soit on détermine directement toutes les fonctions z possibles (et donc toutes les y ensuite), ce qui donne $z'(t) = -\frac{1}{t} + K$, puis $z(t) = -\ln(t) + Kt + L$, et donc $y(t) = (-\ln(t) + Kt + L)e^{2t}$; soit on cherche juste une fonction z convenable, qui donne une seule solution particulière de notre équation, par exemple $z(t) = -\ln(t)$, et $y_p(t) = -\ln(t)e^{2t}$. Il faut alors résoudre l'équation homogène $y'' - 4y' + 4y = 0$. L'équation caractéristique qui lui est associée est $x^2 - 4x + 4 = 0$, soit $(x-2)^2 = 0$. Il y a une seule solution double égale à 2, dont on déduit que $y_h(t) = (At + B)e^{2t}$. On retrouve bien sûr les mêmes solutions générales que tout à l'heure.
2. Aucun problème pour résoudre l'équation homogène : l'équation caractéristique est $x^2 - 2x + 2$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$, et pour racines $x_1 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$ et $x_2 = 1 - i$. On en déduit les solutions de l'équation homogène : $y_h(t) = (A\cos(t) + B\sin(t))e^t$. Pour la solution particulière, il vaut mieux commencer par linéariser le membre de droite sous la forme

$\cos^2(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos(2t)}{2}$. Par principe de superposition, on découpe la recherche de solution particulière en deux. L'équation $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{1}{2}$ a pour solution triviale $y_{p_1}(t) = \dfrac{1}{4}$. Pour l'autre morceau, deux possibilités :

Soit on sait qu'on peut chercher $y_{p_2}(t) = a\cos(2t) + b\sin(2t)$, on calcule alors $y'_{p_2}(t) = -2a\sin(2t) + 2b\cos(2t)$, puis $y''_{p_2}(t) = -4a\cos(2t) - 4b\sin(2t)$. L'équation $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{1}{2}\cos(2t)$ donne alors $(-2a-4b)\cos(2t) + (4a-2b)\sin(2t) = \dfrac{1}{2}\cos(2t)$. On en déduit les deux conditions $-2a - 4b = \dfrac{1}{2}$ et $4a - 2b = 0$, qui impliquent que $b = 2a$, puis $-10a = \dfrac{1}{2}$, soit $a = -\dfrac{1}{20}$ et $b = -\dfrac{1}{10}$. Autrement dit, $y_{p_2}(t) = -\dfrac{1}{20}\cos(2t) - \dfrac{1}{10}\sin(2t)$.

Soit on utilise la méthode du cours en passant aux complexes, et en cherchant une solution à l'équation $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{1}{2}e^{2it}$, en posant $y_{p_2}(t) = Ke^{2it}$. On a alors $y'_{p_2}(t) = 2iKe^{2it}$, puis $y''_{p_2}(t) = -4Ke^{2it}$, donc l'équation se résume à la condition $(-2-4i)Ke^{2it} = \dfrac{1}{2}e^{2it}$, soit $K = \dfrac{1}{-4-8i} = \dfrac{-4+8i}{16+64} = -\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{10}i$, puis $y_{p_2}(t) = \left(-\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{10}i\right)e^{2it}$. Il suffit de prendre la partie réelle de ce produit pour retrouver exactement la même solution particulière que par l'autre méthode.

La conclusion est la même dans les deux cas : en recollant tous les morceaux, $y(t) = (A\cos(t) + B\sin(t))e^t - \dfrac{1}{20}\cos(2t) - \dfrac{1}{10}\sin(2t) + \dfrac{1}{4}$.