AP : Séance n°5

PTSI B Lycée Eiffel

28 novembre 2014

Exercice 1

On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de $-2i$, associe $Z = f(z) = \dfrac{z-2+i}{z+2i}$.

1. (a) Si $z = x+iy$, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y.
   (b) En déduire la nature de :
      i. l'ensemble E des points M d'affixe z, tels que Z soit un réel.
      ii. l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur.
   (c) Représenter ces deux ensembles.
2. On appelle A le point d'affixe $z_A = -2i$.
   Calculer $|f(z)-1| \times |z+2\mathrm{i}|$, et en déduire que les points M' d'affixe Z, lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.

Exercice 2

Soit (E) l'équation différentielle : $2y' - 3y = 5e^{\frac{3}{2}x}$.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Déterminer une solution particulière de (E), et en déduire toutes les solutions de l'équation.
3. Déterminer la solution g de (E) vérifiant $g(0) = 1$.
4. On pose $f(x) = \left(1 + \dfrac{5}{2}x\right) e^{\frac{3}{2}x}$.
   (a) Étudier les variations de f, et calculer ses limites.
   (b) Tracer une allure de la courbe représentative de f.
   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}} f(t)\ dt$.

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

1. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2t}}{t^2}$ (on posera $y(t) = z(t)e^{2t}$).
2. $y'' - 2y' + 2y = \cos^2(t)$.