AP n°4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

14 novembre 2014

Exercice 1

1. L'application ne peut pas être injective puisqu'on aura toujours, quelles que soient les valeurs de x et de y, $f(x,y) = f(y,x)$. Par exemple, $f(0,1) = f(1,0) = (1,0)$. Pour la sujectivité, c'est moins évident. Un couple (s,p) aura un (ou plusieurs) antécédents par l'application f s'il existe des réels x et y dont la somme et le produit sont recpectivement égaux à s et p. Il n'est en fait pas très difficile de construire des couples n'ayant pas d'antécédents : si $s = 0$ et $p = 1$ par exemple, x et y doivent être de signe opposé et ne peuvent donc pas avoir pour produit 1. L'application f n'est donc pas non plus surjective (et encore moins bijective).
2. Pour calculer $f^{-1}(\{(3,2)\})$, on résout simplement le système $\left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 3 \\ xy & = & 2 \end{array}\right.$. On peut procéder par substitution : $y = 3 - x$, donc $x(3-x) = 2$, soit $x^2 - 3x + 2 = 0$ (en passant tout à droite). Cette équation de second degré a pour solutions triviales $x = 1$ (qui donne $y = 2$) et $x = 2$ (qui donne $y = 1$). Le couple $(3,2)$ a donc deux antécédents par f, qui sont les couples $(1,2)$ et $(2,1)$.
Déterminer l'image de $\mathbb{R}^2$ revient à déterminer les couples (s,p) ayant un antécédent par l'application f. On peut résoudre le système général comme on vient de le faire dans un cas particulier ci-dessus. On aura $y = s - x$, donc $x(s-x) = p$, qui donne $x^2 - sx + p = 0$. Pour avoir des solutions, cette équation doit avoir un discriminant positif, ce qui donne la condition $s^2 - 4p \geqslant 0$. Autrement dit, $f(\mathbb{R}^2) = \{(s,p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 \geqslant 4p\}$. On peut même être plus précis : si $s^2 > 4p$, le couple (s,p) admet exactement deux antécédents par f (et on peut vérifier qu'ils sont constitués de deux couples obtenus en permutant le rôle de x et de y) ; et si $s^2 = 4p$, le couple (s,p) admet un seul couple antécédent, pour lequel $y = x$.

Exercice 2

1. Essayons de faire les calculs sans étudier les variations de la fonction. Pour l'injectivité, on part de $\frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x'}{x'^2+1}$, qui donne $2xx'^2 + 2x = 2x'x^2 + 2x'$, soit en simplifiant tout par 2 et en passant tout à gauche, $x - x' + xx'^2 - x'x^2 = 0$, soit encore $x - x' + xx'(x'-x) = 0$, ou enfin $(x-x')(1-xx') = 0$? On obtient donc les deux conditions possibles $x' = x$ (normal) et $xx' = 1$. L'application n'est donc pas injective, puisque par exemple $d\left(\frac{1}{2}\right) = f(2)$. En fait, si $x \neq 0$, il existe toujours un autre réel (l'inverse de x) ayant la même image que x par l'application f.
Pour la surjectivité, tentons de résoudre l'équation $\frac{2x}{x^2+1} = y$, ce qui donne $2x = yx^2 + y$ ou encore $yx^2 - 2x + y = 0$. Cette équation du second degré admet des solutions si son discriminant est positif, soit $4 - 4y^2 \geqslant 0$, ce qui revient à dire que $y^2 \leqslant 1$. Seuls les réels compris entre -1 et 1 admettent donc des antécédents par f, qui n'est pas du tout surjective.

2. Si on reprend les calculs précédents, en imposant $x \in [-1,1]$, la condition $xx' = 1$ ne peut plus jamais être vérifiée (du moins pas pour un $x' \in [-1,1]$, donc l'application devient injective. Par ailleurs, on sait que les y appartenant à $[-1,1]$ admettent des antécédents par f, mais encore faut-il vérifier que ces antécédents sont dans $[-1,1]$ (ou du moins un d'entre eux). En reprenant l'équation du second degré obtenue, ses solutions sont $x_1 = \dfrac{2+2\sqrt{1-y^2}}{2y} = \dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$, qui appartient à $[-1,1]$ si $|1+\sqrt{1-y^2}| \leqslant |y|$, soit $(1+\sqrt{1-y^2})^2 \leqslant y^2$, ou encore $1+1-y^2-2\sqrt{1-y^2} \leqslant y^2$, ce qui donne $\sqrt{1-y^2} \leqslant 1$, ce qui sera toujours vrai. Les plus courageux vérifieront que l'autre racine n'est jamais dans $[-1,1]$, ce qui est de toute façon une conséquence de l'injectivité.

Méthode plus brutale : f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$. La dérivée est donc positive sur $[-1,1]$ et négative le reste du temps. On calcule aisément $f(-1) = -2$ et $f(1) = 1$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ (quotient des termes de plus haut degré). On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

On notera en passant que f est une fonction impaire. La bijectivité de f sur $[-1,1]$ est une conséquence immédiate du fait qu'elle y est continue et strictement croissante.

Exercice 3

On considère dans cet exercice les fonctions suivantes : f est définie par $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$, prolongée en posant $f(0) = 0$; puis $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\,dt$.

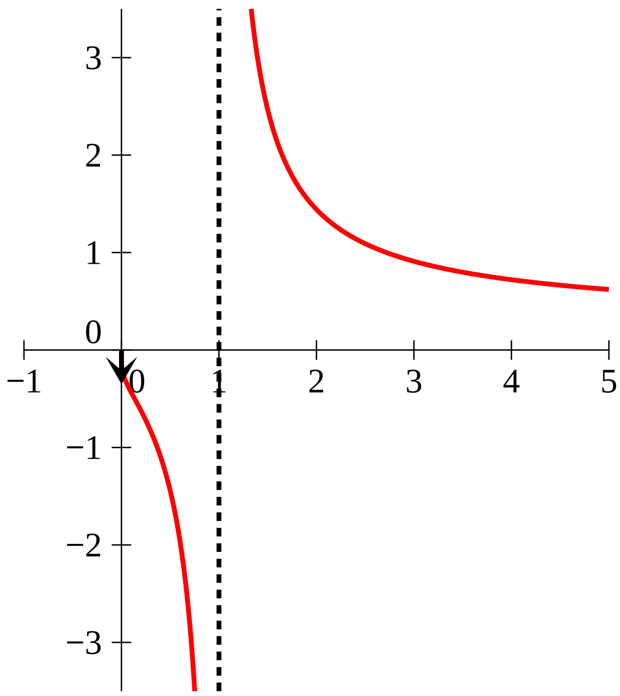
1. (a) Puisqu'elle a été prolongée, la fonction f est définie en 0. Par contre, elle ne l'est pas en 1 où le dénominateur s'annule. Finalement, $\mathcal{D}_f = [0,1[\cup]1,+\infty[$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0 = f(0)$, donc la fonction f est continue en 0.

   (b) La fonction f est dérivable sur son domaine de définition, sauf peut-être en 0, de dérivée $f'(x) = -\dfrac{1}{x(\ln(x))^2} < 0$. Elle est donc strictement décroissante sur $[0,1[$, et également sur $]1,+\infty[$. On a déjà calculé la limite en 0, les autres ne posent pas de problème (il faut juste faire attention au signe de $\ln(x)$ au voisinage de 1, on a une limite négative à gauche et positive à droite). On peut dresser le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

(c) Par croissance comparée, $\lim_{x\to 0} x\ln^2(x) = 0$, et cette quantité est positive, donc $\lim_{x\to 0} -\dfrac{1}{x\ln^2(x)} = -\infty$. La fonction f admet une tangente verticale en 0.

(d) Alons-y pour une première courbe :



2. (a) La fonction H est définie en x si $\forall t \in [x, x^2]$, $t \in \mathcal{D}_f$. ce ne sera manifestement pas le cas si $x < 0$, ni si $x = 1$. Par contre, si $x \in [0, 1[$, x^2 appartient aussi à $[0, 1[$, et f est bien définie et intégrale sur $[x^2, x]$ (dans ce cas, $x^2 \leqslant x$). De même, si $x > 1$, $x^2 > 1$ et H sera bien définie en x. Finalement, $\mathcal{D}_H = \mathcal{D}_f = [0, 1[\cup]1, +\infty[$.

   (b) Si $x > 1$, on intègre une fonction positive entre x et x^2, avec $x \leqslant x^2$, donc le résultat est positif. Mais si $0 \leqslant x < 1$, les bornes de l'intégrale sont « dans le mauvais sens ». Comme f est négative sur l'intervalle d'intégration dans ce cas, le résultat sera tout de même positif. La fonction H ne prend donc que des valeurs positives.

   (c) En notant F une primitive de f, on peut écrire $H(x) = F(x^2) - F(x)$, qu'on peut dériver pour obtenir $H'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \dfrac{2x}{\ln(x^2)} - \dfrac{1}{\ln(x)} = \dfrac{x-1}{\ln(x)}$ en utilisant que $\ln(x^2) = 2\ln(x)$. La fonction H est donc croissante sur $[0, 1[$ (numérateur et dénominateur de H' sont négatifs sur cet intervalle), et à nouveau croissante sur $]1, +\infty[$.

3. (a) Si $x \in [0, 1[$, on sait que $x^2 \leqslant x$, et que f est décroissante sur $[x^2, x]$. On peut donc simplement écrire que, $\forall t \in [x^2, x]$, $\dfrac{1}{\ln(x)} \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{1}{\ln(x^2)}$. En intégrant cet encadrement entre x^2 et x, donc sur un intervalle de largeur $x - x^2 = x(1-x)$, on obtient directement $\dfrac{x(1-x)}{\ln(x)} \leqslant -H(x) \leqslant \dfrac{x(1-x)}{2\ln(x)}$ (attention au signe à inverser à cause des bornes de l'intégrale dans le mauvais sens !), ce qui donne le résultat demandé. Or $\lim_{x\to 0} \dfrac{x(x-1)}{\ln(x)} = 0$

(même pas de forme indéterminée). L'encadrement obtenu prouve alors que $\lim_{x \to 0} H(x) = 0$ (les plus savant évoqueront les théorème des gendarmes pour justifier la conclusion). On peut donc prolonger la fonction en posant $H(0) = 0$, mais ce n'est pas vraiment un prolongement puisque H est définie en 0 une fois qu'on a prolongé f. Pour savoir si elle y est dérivable, on regarde la limite de sa dérivée : on a sans difficulté $\lim_{x \to 0} \frac{x-1}{\ln(x)} = 0$, donc H est dérivable en 0, et sa courbe y admet une tangente horizontale.

(b) Si $x > 1$, on a de même, $\forall t \in [x, x^2]$, $\frac{1}{2\ln(x)} \leqslant f(t) \leqslant \frac{1}{\ln(x)}$, puis en intégrant, $\frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leqslant H(x) \leqslant \frac{x(x-1)}{\ln(x)}$. Comme $\lim_{x \to +\infty} \frac{x(x-1)}{2\ln(x)} = +\infty$ (un petit coup de croissance comparée), la fonction H tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

(c) On peut toujours écrire $H(x) = \int_x^{x^2} t \times \frac{1}{t\ln(t)}\, dt$ et encadrer simplement t par x et x^2. Ainsi, si $x > 1$ par exemple, on aura $xK(x) \leqslant H(x) \leqslant x^2K(x)$. Or, on sait très bien calculer $K(x) = [\ln(\ln(t))]_x^{x^2} = \ln(2\ln(x)) - \ln(\ln(x)) = \ln(2) + \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(x)) = \ln(2)$. Tiens, ça ne dépend pas de x ! En tout cas, $\lim_{x \to 1} x\ln(2) = \lim_{x \to 1} x^2\ln(2) = \ln(2)$, ce qui prouve que $\lim_{x \to 1^+} H(x) = \ln(2)$. Si $x \in [0, 1[$, ça ne change quasiment rien, on retourne l'encadrement et on calcule $K(x)$, avec comme primitive $\ln(-\ln(t))$, ce qui donne exactement la même limite. On peut donc en fait prolonger H en posant $H(1) = \ln(2)$. Par ailleurs, $\lim_{x \to 1} H'(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln(x)} = 1$ (c'est une limite classique du cours issue du taux de variation de la fonction ln). La fonction H est en fait dérivable en 1, et $H'(1) = 1$.

4. Et on conclut avec une autre belle courbe :