AP : Séance n°4

PTSI B Lycée Eiffel

14 novemvre 2014

Exercice 1

On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array} \right.$.

1. Déterminer si f est injective, surjective, bijective.
2. Déterminer $f^{-1}(\{(3,2)\})$ et $f(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

1. La fonction f est-elle injective ? Surjective ?
2. Montrer que la restriction de f à $[-1,1]$ est bijective de $[-1,1]$ sur lui-même. On essaiera de faire deux démonstrations, une par le calcul direct, et une à l'aide d'un tableau de variations.

Exercice 3

On considère dans cet exercice les fonctions suivantes : f est définie par $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$, prolongée en posant $f(0) = 0$; puis $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\ dt$.

1. Étude de f.
   (a) Préciser le domaine de définition de f. La fonction est-elle continue en 0 ?
   (b) Étudier les variations (et les limites) de f.
   (c) Déterminer la limite de f' en 0. Que peut-on en déduire sur la courbe de la fonction f ?
   (d) Tracer une allure de la courbe représentative de f.
2. Variations de H.
   (a) Déterminer le domaine de définition de H.
   (b) Déterminer le signe de $H(x)$.
   (c) Calculer la dérivée H' de H, puis étudier les variations de H.
3. Limites de la fonction H.
   (a) À l'aide d'un encadrement simple de $f(t)$, montrer que, $\forall x \in]0,1[$, on a $\dfrac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leqslant H(x) \leqslant \dfrac{x(x-1)}{\ln(x)}$. En déduire la limite de H en 0, prolonger la fonction si possible et (si vous êtes courageux), demandez-vous si H ainsi prolongée est dérivable en 0.

(b) En utilisant la même méthode qu'à la question précédente, déterminer la limite de H quand x tend vers $+\infty$.

(c) En posant $K(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt$, encadrer $H(x)$ à l'aide de la fonction K, et en déduire la limite de H quand x tend vers 1. Faire comme en 0 (prolongement, dérivée éventuelle).

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction H.