# AP : Séance n°2

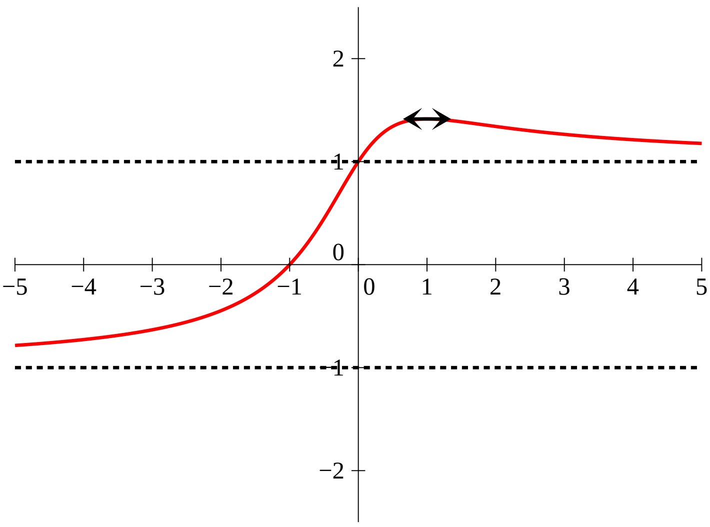
PTSI B Lycée Eiffel

3 octobre 2014

- La fonction $f_1$ est définie sur $\mathbb{R}$ puisqu'on a toujours $x^2+1>0$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_1'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - (x+1) \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-x(x+1)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$. Cette dérivée s'annule pour $x=1$, où la fonction $f_1$ admet un maximum de valeur $f(1) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Pour le calcul des limites, on procède comme souvent en factorisant numérateur et dénominateur, mais attention, il y a un petit piège : $f_1(x) = \dfrac{x(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}$. Attention au fait que $\sqrt{x^2} = |x|$. Si $x>0$, on trouve donc $f_1(x) = \dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 1$, mais si $x<0$, $f_1(x) = -\dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -1$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

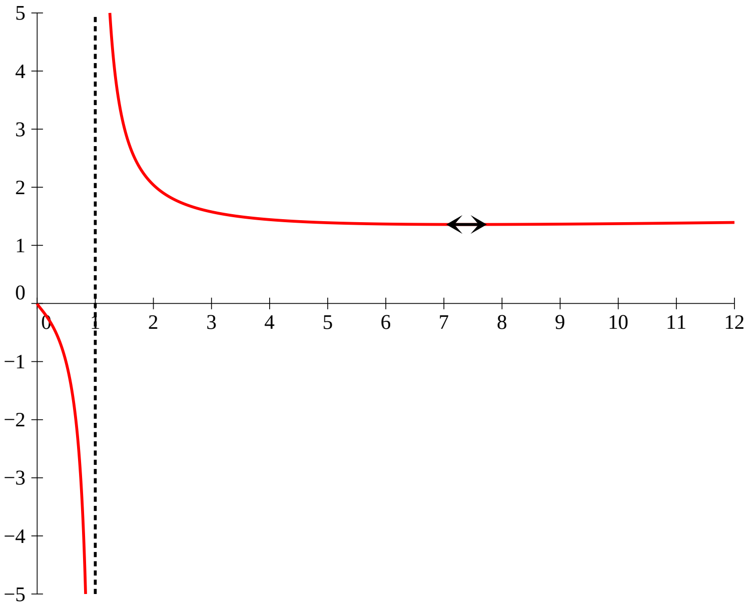
| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | $-1$ | $\nearrow$ | $\sqrt{2}$ | $\searrow$ | $1$ |

Si on veut être plus précis, on peut noter que $f_1(0)=1$, et que $f_1$ est du signe de $x+1$, donc positive sur $[-1,+\infty[$. On conclut avec une première courbe :

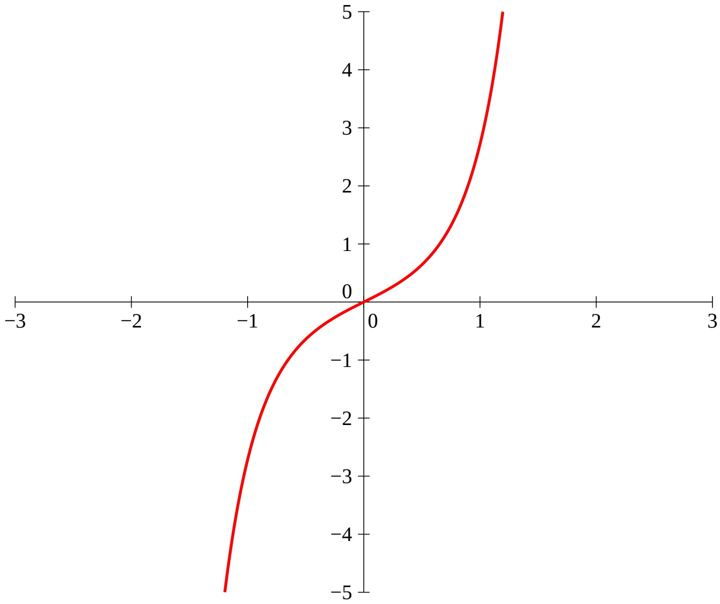



- La fonction $f_2$ est définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ (attention à la valeur d'annulation du logarithme !), elle est dérivable sur cet intervalle, de dérivée $f_2'(x) = \dfrac{\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x}}{\ln^2(x)} = \dfrac{\ln(x) - 2}{2\sqrt{x}\ln^2(x)}$. Notre fonction est donc décroissante sur $]0, 1[$ et sur $]1, e^2[$, admet un maximum de valeur $f_2(e^2) = \dfrac{e}{2}$, et est décroissante sur $]e^2, +\infty[$. On obtient sans difficulté $\lim\limits_{x \to 0} f_2(x) = 0$ (pas de forme indéterminée ici), $\lim\limits_{x \to 1^-} f_2(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f_2(x) = +\infty$, et enfin $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = +\infty$ par croissance comparée (pour les plus curieux, il n'y a pas d'asymptote oblique). On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e^2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_2$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | $\searrow$ | $\dfrac{e}{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |



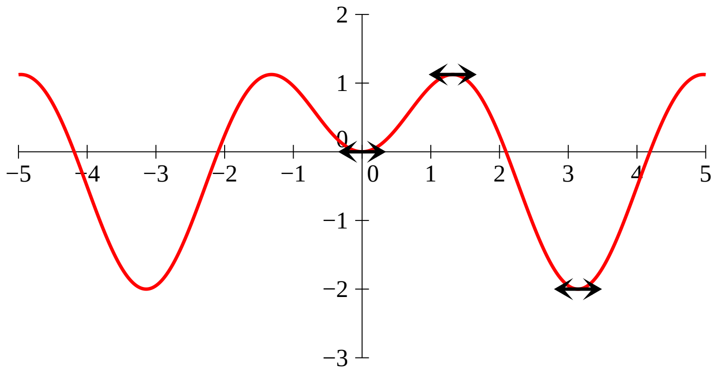

- La fonction $f_3$ est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est impaire. Elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_3'(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} = (1 + 2x^2)e^{x^2}$. La fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On obtient sans difficulté les limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty$. Pas grand chose de plus à dire sur cette fonction peu passionnante !



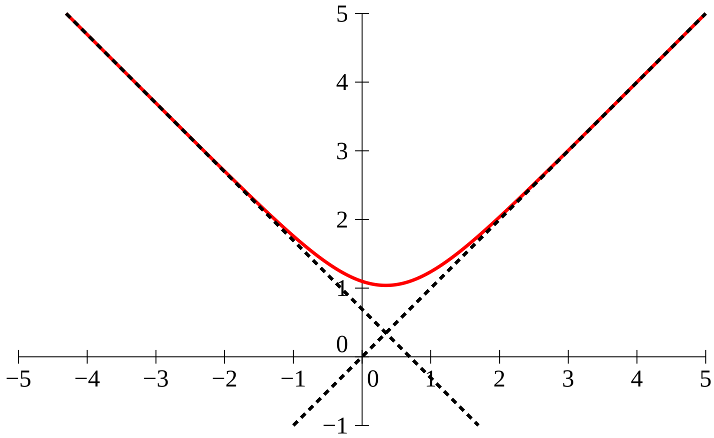

- La fonction $f_4$ est définie sur $\mathbb{R}$, paire et $2\pi$-périodique, on peut se contenter de l'étudier sur $[0, \pi]$. Elle est dérivable sur cet intervalle, de dérivée $f_4'(x) = -\sin(x) + 2\sin(2x) = \sin(x)(4\cos(x) - 1)$ en utilisant la formule de duplication du sinus. Cette dérivée s'annule (sur notre intervalle d'étude) et 0 et en $\pi$, mais aussi en $\arccos\left(\dfrac{1}{4}\right)$, qui est un angle appartenant à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (on ne peut pas dire beaucoup mieux, si ce n'est qu'il est compris entre $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{2}$) que l'on notera $\theta$. On calcule $f_4(0) = 1 - 1 = 0$ ; $f_4(\pi) = -1 - 1 = -2$, et si on est courageux $f_4(\theta) = \cos(\theta) - (2\cos^2(\theta) - 1) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + 1 = \dfrac{9}{8}$, pour dresser le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | $\theta$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $f_5$ | $0$ ↗ | $\dfrac{9}{8}$ | ↘ $-2$ |

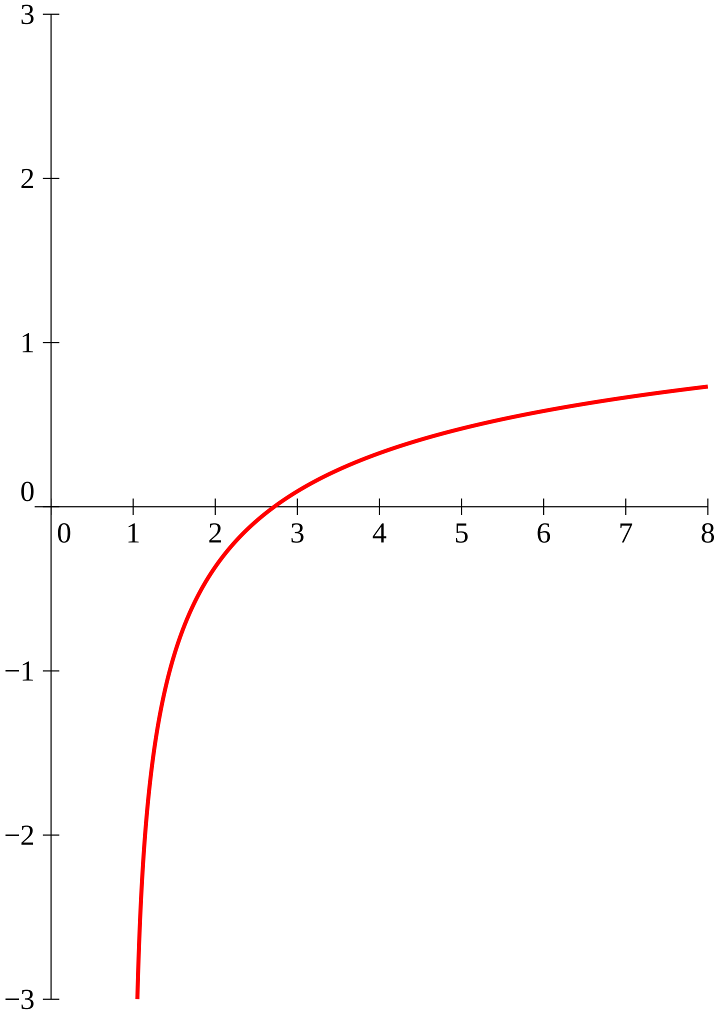
Si on veut compléter un peu l'étude, on peut s'intéresser au signe de $f_4$ sur $[0, \pi]$ : $f_5$ s'annule lorsque $\cos(x) = \cos(2x)$, soit $x$‘ $\equiv 0[2\pi]$, ou $2x \equiv -x[2\pi]$, ce qui donne la valeur d'annulation supplémentaire $x = \dfrac{2\pi}{3}$.



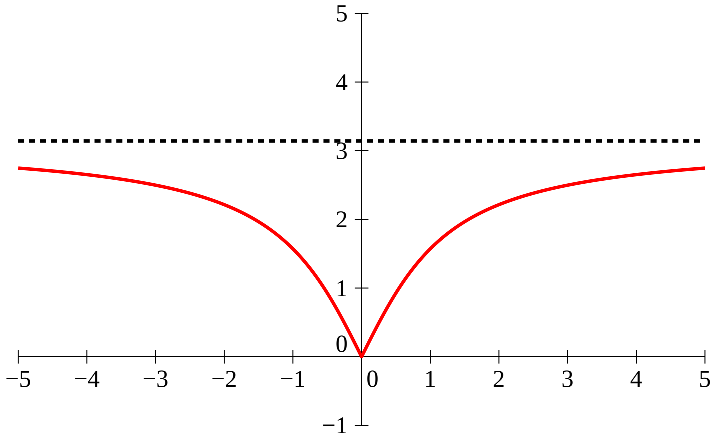
- La fonction $f_5$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (ce qui se trouve dans le ln est toujours strictement positif), de dérivée $f_5'(x) = \dfrac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}}$. La derivée est du signe de son numérateur, donc de $e^{2x} - 2$ (quitte à factoriser par $e^{-x}$). Or, $e^{2x} \geqslant 2$ si $x \geqslant \dfrac{\ln(2)}{2}$. On peut calculer $f_5\left(\dfrac{\ln(2)}{2}\right) = \ln\left(\sqrt{2} + \dfrac{2}{\sqrt{2}}\right) = \ln(2\sqrt{2}) = \dfrac{3}{2}\ln(2)$. De plus, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_5(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée). Avant de tracer la courbe, on peut s'intéresser aux asymptotes de $f_5$ : du côté de $+\infty$, on peut écrire $f_5(x) = \ln(e^x(1+2e^{-2x})) = x + \ln(1+2e^{-2x})$, avec le deuxième morceau qui a une limite nulle en $+\infty$. Cela suffit à prouver que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe de $f_5$ en $+\infty$. De même, la droite d'équation $y = -x + \ln(2)$ est asymptote en $-\infty$.



- La fonction $f_6$ est définie si $\ln(x) > 0$, donc sur $]1, +\infty[$ (et elle est positive sur $]e, +\infty[$). Pas la peine de calculer de dérivée, elle est évidemment croissante comme composée de fonctions croissantes. Pas de difficulté pour les limites non plus : $\lim\limits_{x\to 1} f_6(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_6(x) = +\infty$. Il n'y a plus qu'à tracer une allure de courbe !




- Ce n'est pas si méchant que ça n'en a l'air. Commençons par le domaine de définition : arccos étant définie sur $[-1,1]$, il faut avoir $-1 \leqslant \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant 1$, soit $-1-x^2 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1+x^2$ (puisque $1+x^2$ est toujours positif), et ces deux inégalités sont toujours vraies. La fonction $f_7$ est donc définie sur $\mathbb{R}$. Elle est par ailleurs manifestement paire. Pour étudier les variation, comme arccos est une fonction décroissante, on peut se contenter d'étudier les variations de $g : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, qui a pour dérivée $g'(x) = \dfrac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$. La fonction $g$ est donc croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, et c'est le contraire pour $f_7$. On calcule de plus $f_7(0) = \arccos(1) = 0$, et comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = -1$ (quotient des termes de plus haut degré), on aura $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_7(x) = \arccos(-1) = \pi$. Notons simplement que la fonction n'est pas dévirable en 0 avant de tracer la courbe :




- La fonction $f_8$ est définie sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annule jamais !), et elle est $2\pi$-périodique et impaire, on va l'étudier sur $[0, \pi]$. La fonction $f_8$ est dérivable, de dérivée $f_8'(x) = \dfrac{\cos(x)(2 - \cos(x)) - \sin(x) \times \sin(x)}{(2 - \cos(x))^2} = \dfrac{2\cos(x) - 1}{(2 - \cos(x))^2}$. Cette dérivée est du signe de $2\cos(x) - 1$, qui s'annule lorsque $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$, soit $x = \dfrac{\pi}{3}$ sur notre intervalle d'étude. Elle est positive sur $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$ et négative sur $\left[\dfrac{\pi}{3}; \pi\right]$. Calculons $f_0\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

| $x$ | $0$ | $\dfrac{\pi}{3}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | | $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ | |
| | $0$ ↗ | | ↘ $0$ |

  On peut remarquer que $f_8$ est du signe de $\sin(x)$, donc positive sur $[0, \pi]$, ce qui confirme les variations obtenues.