# AP n°10 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

10 avril 2015

## Exercice 1

1. On peut se rendre compte qu'une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ ne peut jamais être surjective, par exemple à l'aide du théorème du rang : puisque $\dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f) = 3$, on a en particulier $\mathrm{rg}(f) \leqslant 3$, ce qui implique que $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^4$ (qui est bien sûr de dimension 4). calculons tout de même le noyau de notre application : $f(x, y, z) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow x = y = z$ (un calcul à la portée de tous), donc $\ker(f) = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$, et $f$ n'est pas injective. Si on veut être plus précis, $\ker(f)$ est de dimension 1, et $\mathrm{Im}(f)$ sera donc de dimension 2. Pour en trouver une base, il suffit de calculer les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par $f$ et en supprimer une : $f(1, 0, 0) = (1, 0, -1, 1)$ ; $f(0, 1, 0) = (-1, 1, 0, 1)$ et $f(0, 0, 1) = (0, -1, 1, -2) = -(1, 0, -1, 1) - (-1, 1, 0, 1)$. On en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, 0, -1, 1); (-1, 1, 0, 1))$.
2. La linéarité est triviale : $f(\lambda P + Q) = (\lambda P(1) + Q(1); \lambda P(2) + Q(2)) = \lambda f(P) + f(Q)$. Pour le noyau et l'image, il ne faut pas oublier qu'on est dans un espace vectoriel de dimension infinie (au départ du moins, puisque l'espace d'arrivée est de dimension 2, il s'agit de $\mathbb{R}^2$). Hors de question donc de résoudre un système pour trouver le noyau, mais on n'en a pas besoin : $P \in \ker(f)$ si $P(1) = P(2) = 0$, ce qui est équivalent à $P = (X - 1)(X - 2)Q$, où $Q$ est ici un polynôme quelconque. On peut écrire ceci sous la forme $\ker(f) = (X^2 - 3X + 2)\mathbb{R}[X]$. Pour l'image, inutile de s'embêter beaucoup, on sait très bien que, quel que soit le couple de réels $(x, y)$, on sait trouver un polynôme (et même un polynôme de degré 1) pour lequel $P(1) = x$ et $P(2) = y$. Ceci prouve que tous les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont dans l'image de $f$, et donc que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.
3. La linéarité de l'application est évidente, mais le fait que les images soient toujours dans $\mathbb{R}_2[X]$ l'est moins. Puisqu'on en aura besoin ensuite, autant calculer une expression explicite de $f(P)$ : si $P = a + bX + cX^2$, alors $f(P) = (6X + 1)(a + bX + cX^2) - (3X^2 + X)(b + 2cX) = 6aX + 6bX^2 + 6cX^3 + a + bX + cX^2 - 3bX^2 - bX - 6cX^3 - 2cX^2 = a + 6aX + (3b - c)X^2$, qui est bien un élément de $\mathbb{R}_2[X]$. Le noyau de $f$ est constitué des polynômes vérifiant $a = 6a = 3b - c = 0$, soit $a = 0$ et $c = 3b$. Autrement dit, $\ker(f) = \mathrm{Vect}(3X - X^2)$. Notre noyau est de dimension 1, on devrait donc avoir une image de dimension 2. On calcule facilement $f(1) = 6X + 1$ ; $f(X) = 3X^2$ et $f(X^2) = -X^2$, donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(6X + 1, X^2)$. Pour vérifier si le noyau et l'image sont supplémentaires, il suffit de voir si leur intersection est réduite à 0, autrement dit si $3X - X^2 \in \mathrm{Im}(f)$. Ce sera le cas si $3X - X^2 = a(6X + 1) + bX^2$, ce qui est clairement impossible puisque $a$ ne peut pas à la fois être égal à $\dfrac{1}{2}$ et à 0. Les deux sous-espaces sont donc supplémentaires.
4. La linéarité est triviale. Le noyau est constitué de toutes les suites $(u_n)$ vérifiant $u_{n+1} - 2u_n = 0$, autrement dit de toutes les suites géométriques de raison 2. Une autre façon de dire les choses : $\ker(f) = \mathrm{Vect}((2^n))$. La surjectivité est facile : soit $(v_n)$ une suite quelconque, on définit alors la suite $u_n$ par récurrence en posant $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + v_n$. Par construction, on

aura alors $f(u_n) = v_n$. En particulier, un antécédent de la suite définie par $v_n = n$ est la suite suite récurrente vérifiant $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + n$. Bon, on ne sait pas vraiment expliciter $u_n$ à partir de cela, mais on peut toujours espérer. Calculons les premiers termes : $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 4$, $u_4 = 11$, $u_5 = 26$, $u_6 = 57$. Un observateur attentif devrait arriver à conjecturer que $u_n = 2^n - n - 1$, ce qui se prouve aisément par récurrence.

5. Calculons peu subtilement $f^2(x,y,z,t) = (3(3x+y+t)+(3y+z)+(-6x-5y-z-2t); 3(3y+z)+(-6y-2z); -6(3y+z)-2(-6y-2z); -6(3x+y+t)-5(3y+z)-(-6y-2z)-2(-6x-5y-z-2t)) = (3x+y+t; 3y+z; -6y-2z; -6x-5y-z-2t) = f(x,y,z,t)$. Incroyable mais vrai, $f$ est bel et bien un projecteur. On détermine son noyau en résolvant le système obtenu via la condition $f(x,y,z,t) = 0$, ce qui donne $z = -3y$ (deuxième ou troisième équation), $t = -3x-y$ (première équation) et en reportant dans la dernière équation $-6x - 5y + 3y + 6x + 2y = 0$, ce qui est toujours vérifié. On a donc $\ker(f) = \{(x, y, -3y, -3x - y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1,0,0,-3); (0,1,-3,-1))$. En particulier, le noyau est de dimension 2. Pour l'image, puisque $f$ est un projecteur, on peut résoudre l'équation $f(x,y,z,t) = (x,y,z,t)$. On obtient les équations $2x + y + t = 2y + z = -6y - 3z = -6x - 5y - z - 3t = 0$, ce qui donne $z = -2y$ et $t = -2x - y$ (encore une fois, la dernière équation est toujours vérifiée). On a donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,0,0,-2); (0,1,-2,-1))$ (qui est sans surprise de dimension 2 aussi).

6. Commençons par donner une base de chacun des deux espaces : comme $F$ peut être décrit par les équations $z = x + y$ et $t = 0$, on a $F = \mathrm{Vect}((1,0,1,0); (0,1,1,0))$. de même, $G$ est décrit par les équations $y = x$ et $z = t$, donc $G = \mathrm{Vect}((1,1,0,0); (0,0,1,1))$. Chacun des deux sous-espaces est de dimension 2, il suffit par exemple de prouver que leur somme est $\mathbb{R}^4$ tout entier (le calcul servira pour la suite). Soit donc un vecteur $u = (x,y,z,t)$, essayons d'écrire $u$ sous la forme $u = u_F + u_G$, avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$. On cherche donc des coefficients $a$, $b$, $c$ et $d$ tels que $(x,y,z,t) = a(1,0,1,0) + b(0,1,1,0) + c(1,1,0,0) + d(0,0,1,1)$. Autrement dit, on a les quatre équations $x = a + c$ ; $y = b + c$ ; $z = a + b + d$ et $t = d$. On résout très facilement : $d = t$ puis $x + y - z = 2c - d$, soit $c = \dfrac{x+y-z+t}{2}$. On en déduit que $a = x - c = \dfrac{x-y+z-t}{2}$ et $b = y - c = \dfrac{-x+y+z-t}{2}$. On peut reconstituer : $u_F = a(1,0,1,0) + b(0,1,1,0) = \left(\dfrac{x-y+z-t}{2}; \dfrac{-x+y+z-t}{2}; z-t; 0\right)$ ; et $u_G = c(1,1,0,0) + d(0,0,1,1) = \left(\dfrac{x+y-z+t}{2}; \dfrac{x+y-z+t}{2}; t; t\right)$. Nous avons donc prouvé que $F$ et $G$ étaient supplémentaires, et on peut donner directement l'expression de la symétrie $s$ par rapport à $G$ pallèlement à $F$ : $s(u) = u_G - u_F = (y - z + t; x - z + t; 2t - z; t)$. Les plus courageux vérifieront facilement que $s^2(x,y,z,t) = (x,y,z,t)$.

7. Erreur d'énoncé : on devrait avoir $\ker(f + 5\,\mathrm{id})$ dans l'énoncé et pas $\ker(f - 5\,\mathrm{id})$. On peut constater simplement que $f^2 + 2f = 15\,\mathrm{id}$, soit $f \circ (f + 2\,\mathrm{id}) = 15\,\mathrm{id}$. Autrement dit, $f$ est bijective de réciproque $f^{-1} = \dfrac{1}{15}f + \dfrac{2}{15}\,\mathrm{id}$. Les deux sous-espaces vectoriels $F = \ker(f - 3\,\mathrm{id})$ et $G = \ker(f + 5\,\mathrm{id})$, sont constitués respectivement de vecteurs vérifiant $f(u) = 3u$ et de vecteurs vérifiant $f(u) = -5u$, ce qui implique clairement que $F \cap G = \{0\}$ (puisqu'on doit avoir $3u = 5u$ si $u \in F \cap G$). Reste à prouver que $F + G = E$. Soit $u \in E$, alors par hypothèse $(f - 3\,\mathrm{id}) \circ (f + 5\,\mathrm{id})(u) = 0$ (en développant on retombe sur $f^2(u) + 2f(u) - 15u = 0$). Autrement dit, $f(u) + 5u \in \ker(f - 3\,\mathrm{id})$. De même, en factorisant dans l'autre sens, $f(u) - 3u \in \ker(f + 5\,\mathrm{id})$. Or, on peut écrire $u = \dfrac{f(u)+5u}{8} - \dfrac{f(u)-3u}{8}$, donc $u \in F + G$. Les deux sous-espaces sont donc supplémentaires dans $E$. Vérifions que $p = -\dfrac{1}{8}f + \dfrac{3}{8}\,\mathrm{id}$ est

un projecteur, en utilisant la caractérisation $p \circ p = p$ : $p \circ p = \frac{1}{64} f^2 - \frac{6}{64} f + \frac{9}{64} \,\mathrm{id} = \frac{-2f + 15\,\mathrm{id} - 6f + 9\,\mathrm{id}}{64} = -\frac{1}{8} f + \frac{3}{8} \,\mathrm{id} = p$ en utilisant la propriété $f^2 = -2f + 15\,\mathrm{id}$ donnée en début d'énoncé. De même, $q \circ q = \frac{1}{64} f^2 + \frac{10}{64} f + \frac{25}{64} \,\mathrm{id} = \frac{-2f + 15\,\mathrm{id} + 10f + 25}{64} = \frac{1}{8} f + \frac{5}{8} \,\mathrm{id} = q$. La dernière propriété se montre par récurrence, mais on a intérêt à d'abord calculer $p \circ f = -\frac{1}{8} f^2 + \frac{3}{8} f = \frac{2f - 15\,\mathrm{id} + 3f}{8} = 5\left(\frac{1}{8} f - \frac{3}{8} \,\mathrm{id}\right) = -5p$, et $f \circ q = \frac{1}{8} f^2 + \frac{5}{8} f = \frac{3f + 15\,\mathrm{id}}{8} = 3q$. Prouvons désormais par récurrence la propriété $P_n$ : $f^n = (-5)^n p + 3^n q$. Au rang 1, $-5p + 3q = \frac{5}{8} f - \frac{15}{8} \,\mathrm{id} + \frac{3}{8} f + \frac{15}{8} \,\mathrm{id} = f$, donc la propriété $P_1$ est vraie. Supposons $P_n$ vraie, alors $f^{n+1} = f \circ f^n = (-5)^n f \circ p + 3^n f \circ q = (-5)^{n+1} p + 3^{n+1} q$, ce qui prouve l'hérédité de la propriété $P_n$, qui est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$. Les plus curieux vérifieront que $p$ est le projecteur sur $G$ parallèlement à $F$, et $q$ le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$ (ce qui est cohérent avec le fait que $p + q = \mathrm{id}$).

## Exercice 2

1. Allons-y brutalement : $\frac{1+x}{1-x} = (1+x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + o(x^6)) = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 2x^6 + o(x^6)$. Il ne reste plus qu'à composer par ln, en posant $u = 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 2x^6 + o(x^6)$ : $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{6}u^6 + o(u^6) = 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 2x^6 - \frac{1}{2}(4x^2 + 4x^4 + 4x^6 + 8x^3 + 8x^4 + 8x^5 + 8x^6 + 8x^5 + 8x^6) + \frac{1}{3}(8x^3 + 8x^6 + 24x^4 + 24x^5 + 24x^6 + 24x^5 + 48x^6) - \frac{1}{4}(16x^4 + 64x^5 + 64x^6 + 96x^6) + \frac{1}{5}(32x^5 + 160x^6) - \frac{1}{6}(64x^6) + o(x^6) = 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 2x^6 - 2x^2 - 4x^3 - 6x^4 - 8x^5 - 10x^6 + \frac{8}{3}x^3 + 8x^4 + 16x^5 + \frac{80}{3}x^6 - 4x^4 - 16x^5 - 40x^6 + \frac{32}{5}x^5 + 32x^6 - \frac{32}{3}x^6 + o(x^6) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + o(x^6)$. Autrement dit, $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$. Une formule aussi simple, ça ne peut pas être un hasard : la dérivée de notre fonction vaut $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}$. Comme $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + o(x^4)$, une simple primitivation de développement limité donne le résultat obtenu si péniblement plus haut. Dernière remarque en passant : on peut aussi calculer le Dl en faisant $\frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))$, ça va nettement plus vite !

2. On écrit bien sûr $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$, et on va faire un développement limité en 0. On écrit d'abord $\frac{1}{x}\ln(1+x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + o(x^3)$, puis, en appelant $u$ l'expression précédente, $f(x) = e.e^{u-1} = e\left(1 + u - 1 + \frac{1}{2}(u-1)^2 + \frac{1}{6}(u-1)^3 + o(u^3)\right) = e\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{48}x^3 + \right.$ $e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 - \frac{7e}{16}x^3 + o(x^3)$. La fonction $f$ est donc prolongeable par continuité en 0, en posant $f(0) = e$. Ce prolongement est dérivable, avec une tangente en 0 d'équation $y = e - \frac{e}{2}x$, et la courbe est localement au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

3. On pose bien sûr $X = \frac{1}{x}$, puis on écrit $f(x) = \sqrt{\frac{1}{X^4} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{X} - 1} - \frac{X+1}{X}\sqrt{\frac{1}{X^2} + 1} =$

$\dfrac{\sqrt{1-X^2+X^3-X^4}}{X^2} - \dfrac{(1+X)\sqrt{1+X^2}}{X^2} =$
$\dfrac{1}{X^2}\left(1-\dfrac{1}{2}X^2+\dfrac{1}{2}X^3-\dfrac{1}{2}X^4-\dfrac{1}{8}X^4-(1+X)\left(1+\dfrac{1}{2}X^2-\dfrac{1}{8}X^4\right)+o(X^4)\right)$
$= \dfrac{1}{X^2}\left(-X-X^2-\dfrac{1}{2}X^4+o(X^4)\right) = -\dfrac{1}{X}-1-\dfrac{1}{2}X^2+o(X^2).$
Autrement dit, $f(x) \underset{+\infty}{=} -x-1-\dfrac{1}{2x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. La courbe de $f$ admet donc pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y=-x-1$, et elle est localement située en-dessous de cette asymptote. En $-\infty$, le calcul ne reste pas valable : la factorisation par $X^4$ sous la racine ne pose pas de problème, mais celle par $X^2$ va faire sortir un $-X$ au lieu du $X$, donnant $f(x) = \dfrac{1}{X^2}\left(1-\dfrac{1}{2}X^2+\dfrac{1}{2}X^3-\dfrac{1}{2}X^4-\dfrac{1}{8}X^4+(1+X)\left(1+\dfrac{1}{2}X^2-\dfrac{1}{8}X^4\right)+o(X^4)\right) = \dfrac{2}{X^2}+ o\left(\dfrac{1}{X^2}\right)$. Pas la peine d'aller plus loin, il n'y aura pas d'asymptote oblique en $-\infty$ puisque le premier terme du développement asymptotique sera en $x^2$.

4. Posons donc $f_n(x) = e^{-\frac{x}{n}} - x$, et constatons que $f_n'(x) = -\dfrac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}} - 1$ est toujours négative. La fonction $f_n$ est donc strictement décroissante. Comme $f_n(0)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$, $f_n$ effectue une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $]-\infty,1[$, et s'annule en particulier une seule fois sur cet intervalle.
Comme $u_n > 0$, $-\dfrac{u_n}{n} < 0$, et $e^{-\frac{u_n}{n}} \in ]0,1[$, ce qui prouve que la suite $(u_n)$ est bornée puisque cette valeur est par définition égale à $u_n$. Pour déterminer la monotonie de la suite, calculons $f_{n+1}(u_n) = e^{-\frac{u_n}{n+1}} - u_n > e^{-\frac{u_n}{n}} - u_n = 0$, puisque $\dfrac{u_n}{n} < -\dfrac{u_n}{n+1} < 0$. On en déduit que $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$ ce qui prouve, en appliquant la décroissance de la fonction $f_{n+1}$, que $u_n < u_{n+1}$, et donc que $(u_n)$ est croissante. La suite étant croissante majorée, elle converge vers un réel $l \in [0,1]$. Puisque notre suite est bornée par 0 et 1, on peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{u_n}{n} = 0$, et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{u_n}{n}} = 1$, ce qui revient à dire que $(u_n)$ converge vers 1. Oui, je sais, la monotonie de la suite ne sert strictement à rien, en fait.
On sait que $u_n = 1+o(1)$, donc $u_n = e^{-\frac{u_n}{n}} = e^{-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})} = 1-\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. On réintègre le terme supplémentaire dans le calcul : $u_n = e^{-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})} = 1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = 1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Allez, un dernier tour pour le fun (et surtout parce que l'énoncé le demande) : $u_n = e^{-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{3}{2n^3}+o(\frac{1}{n^3})} = 1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{3}{2n^3}+\dfrac{1}{2n^2}-\dfrac{1}{n^3}-\dfrac{1}{6n^3}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, soit $u_n = 1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{2n^2}-\dfrac{8}{3n^3}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.