AP : Séance n°10

PTSI B Lycée Eiffel

10 avril 2015

Exercice 1

Quelques petits exercices sur les applications linéaires :

1. L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x, x + y - 2z)$ est-elle injective ? Surjective ? Donner une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
2. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $f(P) = (P(1), P(2))$. Montrer que f est linéaire, et déterminer son noyau et son image.
3. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $f(P) = (6X + 1)P - (3X^2 + X)P'$. Montrer que f est un endorphisme, déterminer son noyau et son image. Sont-ils supplémentaires ?
4. On considère l'espace vectoriel E des suites réelles, et on définit f sur E par $f(u_n) = v_n$, où $v_n = u_{n+1} - 2u_n$. Montrer que f est linéaire et déterminer son noyau. Montrer que f est surjective. Déterminer un antécédent de la suite définie par $u_n = n$ par l'application f.
5. Vérifier que l'endomorphisme défini sur $\mathbb{R}^4$ par $f(x, y, z, t) = (3x+y+t, 3y+z, -6y-2z, -6x-5y-z-2t)$ est un projecteur et donner ses éléments caractéristiques.
6. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels $F = \{(x, y, z, t) \mid x + y - z = t = 0\}$, et $G = \{(x, y, z, t) \mid x - y = z - t = 0\}$. Vérifier que F et G sont supplémentaires, et déterminer l'expression de la symétrie par rapport à G parallèlement à F.
7. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E vériant $f^2 + 2f - 15\,\mathrm{id}_E = 0$. Montrer que f est un isomorphisme, et que $\ker(f - 3\,\mathrm{id}) \oplus \ker(f - 5\,\mathrm{id}) = E$. En posant $p = -\dfrac{1}{8}f + \dfrac{3}{8}\,\mathrm{id}$ et $q = \dfrac{1}{8}f + \dfrac{5}{8}\,\mathrm{id}$, montrer que p et q sont des projecteurs, puis prouver que, $\forall n \geqslant 1$, $f^n = (-5)^n p + 3^n q$.

Exercice 2

Quelques calculs sur les fonctions :

1. Calculer le $DL_6(0)$ de $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, puis calculer sa dérivée, et se rendre compte qu'on s'est beaucoup fatigué pour rien.
2. Déterminer le comportement de la fonction $f : x \mapsto (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ au voisinage de 0.
3. On pose $f(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + x - 1} - (x + 1)\sqrt{x^2 + 1}$, on admet que f est définie au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$. Déterminer si f admet une asymptote oblique (et donner son équation si c'est le cas) en $+\infty$, puis en $-\infty$.
4. Montrer que l'équation $e^{-\frac{x}{n}} = x$ admet une seule solution strictement positive u_n. Montrer que (u_n) converge vers 1, puis effectuer un développement asymptotique à quatre termes de u_n.