Chapitre 7 : Matrices et systèmes

PTSI B Lycée Eiffel

18 décembre 2013

Le possible est une matrice formidable.

Victor Hugo

Unfortunately, no one can be told what the Matrix is.
You have to see it for yourself.

Tagline du film Matrix (traduction en exercice).

Introduction

Avant de rentrer dans le vif du sujet en algèbre linéaire (les fameux espaces vectoriels, que nàous aborderons au deuxième semestre), un chapître plus orienté calcul sur un outil qui sera fondamental dans la suite du cours : les matrices. Il s'agit ici simplement d'apprendre à calculer avec les matrices, mais aussi de voir le lien entre ces nouveaux objets et une autre notion que vous maîtrisez déjà : les systèmes d'équations linéaires, pour lesquelles nous verrons une méthode de résolution systématique.

Objectifs du chapitre :

- maîtriser le calcul matriciel, calculs de puissances ou d'inverse notamment.
- comprendre le fonctionnement de l'algorithme du pivot de Gauss, et savoir l'appliquer efficacement dans le cadre de l'inversion de matrices comme dans celui de la résolution de systèmes.

1 Un exemple amusant

Pour introduire le concept de matrice, intéressons-nous au problème tout à fait concret suivant : dans un jeu video débile (qui a dit pléonasme ?), on peut composer des armées consituées de trois types de créatures, trolls, orcs et gobelins. Un élève de PTSI ayant trop de temps à perdre contitue lors d'une même soirée les trois armées suivantes :

	Trolls	Orcs	Gobelins
Armée 1	3	5	8
Armée 2	6	2	12
Armée 3	5	5	15

Les bêbêtes en question étant assez gourmandes, il faudra les nourrir quotidiennement d'une certaine quantité d'humains, de choux de Bruxelles, et de ris de veau braisé aux truffes. La quantité de nourriture ingurgitée par chaque type de créature est donnée, en kilos par jour, dans le tableau suivant :

	Humains	Choux	Ris de veau
Troll	10	3	8
Orc	8	4	10
Gobelin	2	6	2

La question est fort simple : quelle quantité de chaque aliment le larbin chargé de faire les courses doit-il se procurer pour nourrir chacune des armées ? La réponse est la suivante :

	Humains	Choux	Ris de veau
Armée 1	86	77	90
Armée 2	100	98	92
Armée 3	120	125	120

Le remplissage du dernier tableau découle d'un calcul assez simple. Pour trouver par exemple la valeur 86 de la première case, on a multiplié deux à deux les éléments de la première ligne du premier tableau par ceux de la première colonne du deuxième tableau, et additionné le tout : $3 \times 10 + 5 \times 8 + 8 \times 2 = 86$. De même pour les autres éléments, on effectue à chaque fois le « produit » d'une ligne du premier tableau par une colonne du deuxième tableau. Eh bien, ce qu'on vient de faire, c'est exactement un produit de matrices. Cette opération en apparence peu naturelle quand on la présente de façon formelle (ce qu'on ne va pas tarder à faire) est donc en réalité très concrète. Elle interviendra systématiquement dès qu'on possède trois lots de données, deux tableaux exprimant la première donnée en fonction de la deuxième et la deuxième en fonction de la troisième, et qu'on cherche à exprimer directement la première donnée en fonction de la troisième (on reviendra sur cet aspect du calcul matriciel quand on reverra ces magnifiques objets dans le cadre des applications linéaires entre espaces vectoriels).

2 Structure et opérations

2.1 Somme et produits

Définition 1. Une **matrice réelle** à n lignes et p colonnes (il pourra éventuellement nous arriver de mettre des nombres complexes plutôt que des nombres réels dans nos matrices, ce qui ne change absolument rien à tout ce qui va être raconté dans la suite du chapître) est un tableau rectangulaire (à n lignes et p colonnes) contenant np nombres réels. On note un tel objet $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ ou de façon plus complète

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & \ddots & & m_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, m_{ij} est le terme de la matrice M se trouvant à l'intersection de la $i$ème ligne et de la $j$ème colonne.

Définition 2. L'ensemble des matrices réelles à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Dans le cas où $n = p$, on dit que la matrice est **carrée** et on note plus simplement l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque 1. Dans le cas où $n = 1$, la matrice se réduit à une ligne, et on parle effectivement de matrice-ligne. De même, lorsque $p = 1$, on parlera de matrice-colonne. La notation est alors extrêmement similaire à celle utilisée pour désigner un élément de $\mathbb{R}^n$ par ses coordonnées dans une base, et on identifiera de fait souvent $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Définition 3. Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la **somme** de A et de B est la matrice $A + B = C$, où $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
Il faut bien évidemment que les deux matrices aient la même taille (même nombre de lignes et de colonnes) pour pouvoir effectuer leur somme.

Définition 4. La **matrice nulle** $0_{n,p}$ (ou plus simplement 0 si les dimensions de la matrice sont claires dans le contexte) est la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls. L'**opposé** d'une matrice A pour l'opération de somme sera noté $-A$, il s'agit de la matrice obtenue en prenant les opposés de tous les termes de la matrice A.

Proposition 1. L'addition matricielle vérifie les propriétés suivantes :

- elle est associative : $A + (B + C) = (A + B) + C$ dès que les matrices A, B et C sont de même taille.
- elle est commutative : $A + B = B + A$.
- la matrice nulle $0_{n,p}$ est un élément neutre pour l'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: $0 + A = A + 0 = A$ dès que ça a un sens.
- toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ admet un opposé, c'est-à-dire une matrice $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $A + B = B + A = 0$. On notera plus simplement $B = -A$.

Démonstration. Toutes ces propriétés sont évidentes, elles découlent immédiatement des propriétés de la somme de réels, puisque la somme se fait terme à terme. □

Définition 5. Le **produit d'une matrice A par un réel** λ est la matrice, notée λA, obtenue à partir de A en multipliant chacun de ses coefficients par λ.

Proposition 2. Le produit par un réel est distributif par rapport à l'addition de matrices : $(\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B)$. On a également les propriétés suivantes : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad 1.A = A$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\quad \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

Remarque 2. Ces propriétés du produit « extérieur » (par opposition au produit intérieur, c'est-à-dire au produit de deux matrices qu'on va définir juste après), cumulées aux propriétés de la somme de matrices, font de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ un **espace vectoriel réel**.

Définition 6. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, alors le **produit** des deux matrices A et B est la matrice $A \times B = C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ où $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\forall j \in \{1, \dots, q\}$, $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.

Remarque 3. Cette définition correspond exactement à ce qu'on a vu dans notre exemple introductif : on multiplie terme à terme la i-ème ligne de A par la j-ème colonne de B et on somme le tout. Il faut faire très attention à ce que les tailles des matrices soient compatibles pour que le produit existe (nombre de colonnes de la première matrice égal au nombre de lignes de la deuxième).

Définition 7. La **matrice identité** dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 3. Propriétés élémentaires du produit de matrices :
- Le produit de matrices est associatif : $(AB)C = A(BC)$.
- Le produit de matrices est distributif par rapport à l'addition : $A(B+C) = AB + AC$; $(A+B)C = AC + BC$.
- La matrice identité est un élément neutre pour le produit : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $I_n A = A I_p = A$.
- Le produit d'une matrice par une matrice nulle (de taille compatible), à gauche comme à droite, est toujours nul.

Démonstration.
- Pour prouver l'associativité, il faut juste un peu de courage : considérons A et B ayant les dimensions indiquées dans la définition du produit, et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, qu'on peut donc multiplier à droite par B. Si on note $D = (AB)C$, on peut alors écrire $d_{ij} = \sum_{k=1}^{q} (AB)_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^{q} (\sum_{l=1}^{p} a_{il} b_{lk}) c_{kj}$. On peut écrire ceci plus simplement sous la forme $\sum_{k=1}^{q} \sum_{l=1}^{p} a_{il} b_{lk} c_{kj}$. De même, en notant $E = A(BC)$, on aura $E_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} (BC)_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} (\sum_{l=1}^{q} b_{kl} c_{lj}) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$. Les deux formules sont bien les mêmes puisque les indices dans une somme double sont muets.
- C'est un calcul assez élémentaire sur les sommes : $\sum_{k=1}^{p} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{p} a_{ik} c_{kj}$. L'autre calcul est essentiellement identique.
- Pour cette propriété, on notera juste I et pas I_n par souci de lisibilité. Soit m_{ij} le terme d'indice i, j de la matrice produit IA. On a par définition $m_{ij} = \sum_{k=1}^{n} I_{ik} A_{kj}$. Mais le seul terme non nul parmi les I_{ik} est I_{ii}, qui vaut 1. On a donc bien $m_{ij} = A_{ij}$. Pour le produit à droite par I_p, la démonstration est essentiellement la même.
- Laissée en exercice !

$\square$

Remarque 4. Attention aux gros pièges suivants quand on manipule le produit matriciel :
- Le produit de matrices n'est pas commutatif. En fait, l'existence du produit AB n'implique même pas celle de BA, mais même dans le cas des matrices carrées, par exemple, on a en général $AB \neq BA$. Dans le cas contraire, on dit que A et B commutent.
- Parler de division de matrice n'a en général aucun sens.
- On ne peut pas simplifier les produits : $AB = AC$ n'implique en général pas $B = C$, même si A n'est pas la matrice nulle.

Exemple 1 : $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $A \times B = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 6 & 27 \end{pmatrix}$

Exemple 2 : $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$; $A \times B = 0$

2.2 Transposition

Définition 8. La **transposée** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, où $m_{ij} = a_{ji}$. On la note ${}^t A$. Autrement dit, les lignes de A sont les colonnes de ${}^t A$ et vice-versa.

Proposition 4. La transposition vérifie les propriétés suivantes : $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,
- ${}^t({}^t A) = A$
- ${}^t(A + B) = {}^t A + {}^t B$
- ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^t A$

- $\forall C \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$, ${}^t(AC) = {}^tC\, {}^tA$.

Démonstration. Les trois premières propriétés ne posent aucun problème, mais la dernière est nettement plus complexe. Écrivons ce que vaut le terme d'indice ij à gauche et à droite de l'égalité. Pour ${}^t(AC)$, il est égal au terme d'indice ji de AC, c'est-à-dire à $\sum_{k=1}^{p} a_{jk}c_{ki}$. À droite, on a $\sum_{k=1}^{p} ({}^tC)_{ik}({}^tA)_{kj} = \sum_{k=1}^{p} c_{ki}a_{jk}$. Les deux quantités sont bien égales. □

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$; ${}^tA = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Définition 9. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **symétrique** si ${}^tA = A$, c'est-à-dire si $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}^2$, $a_{ij} = a_{ji}$. Elle est antisymétrique si ${}^tA = -A$.

2.3 Matrices carrées

Définition 10. Les puissances entières (positives) d'une matrice carrée sont définies par récurrence de la façon suivante : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A^0 = I_n$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^{k+1} = A \times A^k$.

Définition 11. Une matrice carrée est **diagonale** si seuls ses coefficients a_{ii} sont (éventuellement) non nuls (on les appelle d'ailleurs coefficients diagonaux de A), ou encore $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$.
Une matrice carrée est **triangulaire supérieure** si seuls les termes « au-dessus » de sa diagonale sont non nuls, c'est-à-dire $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$, ou encore si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$.
On définit de même des matrices triangulaires inférieures.

Proposition 5. Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure (et de même pour les matrices triangulaires inférieures).

Démonstration. Pour les matrices diagonales, prenons deux matrices diagonales (de taille n) A et B. Le terme d'indice ij de AB vaut $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Parmi tous les termes intervenant dans cette somme, seul un des termes de gauche est non nul, quand $k = i$, et seul un des termes de droite est non nul, quand $k = j$. Si $i \neq j$, on n'a donc que des produits nuls, ce qui prouve bien que les seuls termes qui peuvent être non nuls pour AB sont les termes diagonaux.
C'est un peu le même principe pour les matrices triangulaires supérieures. Prenons deux telles matrices A et B et supposons $i > j$. Le terme d'indice ij de AB vaut $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} 0 \times b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} \times 0 = 0$. La matrice AB est donc triangulaire supérieure. □

Remarque 5. La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est triangulaire inférieure (et vice versa).

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 0 & 18 & -15 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Remarquez au passage que les termes diagonaux de $A \times B$ sont obtenus comme le produit de ceux de A par ceux de B.

Remarque 6. On déduit aisément des remarques précédentes que les puissances d'une matrice diagonale sont simplement obtenues en prenant les puissances correspondantes de ses coefficients diagonaux.

Définition 12. Une matrice carrée A est dite **nilpotente** s'il existe un entier n tel que $A^n = 0$.

Remarque 7. Si une matrice carrée d'ordre n est nilpotente, elle vérifie nécessairement $A^n = 0$ (pour l'entier n correspondant à l'ordre de la matrice).

Théorème 1. (formule du binôme de Newton) Si A et B sont deux matrices qui commutent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i}$.

Démonstration. C'est la même que pour le binôme de Newton sur les réels. Comment, on n'a pas vu cette démonstration en cours ? Ne vous inquiétez pas, ça viendra. □

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On remarque que $A = I + B$, où $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $B^k = 0$ à partir de $k = 3$ (autrement dit, la matrice B est nilpotente). Les matrice I et B commutent certainement, on peut donc appliquer la formule du binôme : $A^k = (I_3 + B)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} I^i B^{k-i} = I^k + k \times I^{k-1}B + \frac{k(k-1)}{2} \times I^{k-2}B^2 = I_3 + kB + \frac{k(k-1)}{2}B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2k & 3k+2k(k-1) \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2k & k(2k+1) \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple : Il est également fréquent de calculer les puissances successives d'une matrice par récurrence. Posons par exemple $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, et on constate que $A^2 = -2A + 3I$. Prouvons alors par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists (u_k, v_k) \in \mathbb{R}^2$, $A^k = u_k A + v_k I$. C'est vrai pour $k = 2$ comme on vient de le voir, mais aussi pour $k = 1$ puisque $A = 1A + 0I$ (on pose donc $u_1 = 1$ et $v_1 = 0$) et pour $k = 0$ puisque $A^0 = 0A + 1I$ (donc $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$). Supposons le résultat vrai au rang k, on a alors $A^{k+1} = A \times A^k = A(u_k A + v_k I) = u_k A^2 + v_k A = u_k(-2A+3I) + v_k A = (v_k - 2u_k)A + 3u_k I$. En posant $u_{k+1} = -2u_k + v_k$ et $v_{k+1} = 3u_k$, on a bien la forme demandée au rang $n+1$, d'où l'existence des coefficients u_k et v_k.
Nous avons de plus obtenu des relations de récurrence qui permettent de faire le calcul suivant : $u_{k+2} = -2u_{k+1} + v_{k+1} = -2u_{k+1} + 3u_k$. La suite (u_k) est donc récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $x^2 + 2x - 3 = 0$, elle a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et admet donc deux racines $r = \frac{-2-4}{2} = -3$, et $s = \frac{-2+4}{2} = 1$. On en déduit que $u_k = \alpha(-3)^k + \beta$, avec $u_0 = \alpha + \beta = 0$ et $v_0 = -3\alpha + \beta = 1$, dont on tire $\alpha = -\frac{1}{4}$ en faisant la différence des deux équations, puis $\beta = \frac{1}{4}$. On a donc $u_k = \frac{1}{4}(1 - (-3)^k)$ et $v_k = \frac{3}{4}(1 - (-3)^{k-1})$.
On peut alors écrire explicitement les coefficients de la matrice A^k (ce qui n'a pas grand intérêt en soi...).

Définition 13. La **trace** d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le nombre $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Proposition 6. La trace est une application linéaire : $\mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda A + \mu B$.
La trace vérifie la formule $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ (quand A et B sont de même taille).

Démonstration. La première propriété est complètement évidente. La deuxième l'est un peu moins. Calculons donc $\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$. De même, $\mathrm{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ij}$. Quitte à échanger le rôle des deux variables muettes i et j, c'est bien la même chose. □

3 Inversion de matrices

Définition 14. Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$. La matrice B est alors notée A^{-1} et on l'appelle **matrice inverse** de la matrice M.

Remarque 8. La notion n'a pas bien sûr de sens dans le cas de matrices qui ne sont pas carrées.

Exemple : L'inverse de la matrice I_n est bien sûr I_n elle-même. La matrice nulle n'est pas inversible.

Exemple : Cherchons à déterminer de façon très rudimentaire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
On cherche donc une matrice $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $AB = I$ (dans ce cas, le produit dans l'autre sens sera automatiquement égal à I, comme on pourra le vérifier facilement). On trouve donc le système $\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & + & z & = & 1 \\ 2y & + & t & = & 0 \\ 3x & + & 2z & = & 0 \\ 3y & + & 2t & = & 1 \end{array} \right.$. La deuxième équation donne $t = -2y$, ce qui en reportant dans la dernière amène $y = -1$, et donc $t = 2$. La première équation donne $z = 1-2x$, soit en reportant dans la troisième $-x + 2 = 0$, donc $x = 2$, puis $z = -3$. Finalement, la matrice A est inversible, et son inverse est $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. On va très vite essayer de trouver des méthodes de calcul d'inverse plus efficace, car je doute que vous ayez envie de calculer l'inverse d'une matrice d'ordre 5 de cette façon.

Remarque 9. Une matrice diagonale est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. On a alors, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$. Nous verrons plus loin que cette caractérisation s'étend aux matrices triangulaires.

Proposition 7. Principales propriétés calculatoires de l'inversion de matrices.

- Si A est inversible, son inverse est unique.
- Si A est inversible, alors A^{-1} aussi et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ sont deux matrices inversibles, le produit AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Si A est une matrice inversible, A^k est inversible pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
- Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient $AB = I$, alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

Démonstration.

- Supposons donc que A admette deux inverses distincts qu'on va noter B et C, autrement dit que $AB = BA = AC = CA = I$. On peut alors calculer $C(AB) = CI = C$, mais aussi $(CA)B = IB = B$. Le produit étant associatif, on trouve nécessairement $C = B$.

- C'est évident au vu de la définition de l'inverse.
- Vérifions que le produit de AB par ce que je prétends être son inverse donne bien l'identité : $ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$, dans l'autre sens c'est pareil.
- Sans faire une belle récurrence, constatons que $A \times \cdots \times A \times A^{-1} \times \cdots \times A^{-1} = I$ par simplifications successives « par le milieu ».
- C'est plus dur qu'il n'y parait, on va admettre ce résultat.

□

Remarque 10. Un des principaux intérêts de travailler avec des matrices inversibles est qu'on peut simplifier un peu plus naturellement certains calculs, notammant : si M est une matrice inversible et $MA = MB$, alors $A = B$ (il suffit de multiplier l'égalité à gauche par M^{-1} pour obtenir le résultat). Autre remarque utile : si A et B sont deux matrices non nulles telles que $AB = 0$, alors aucune des deux matrices n'est inversible (sinon, par l'absurde, en multipliant à gauche par l'inverse de A ou à droite par l'inverse de B, on constaterait que l'autre matrice est nulle).

Exemple : Le calcul d'inverse de matrices peut être grandement simplifié si on connait un polynôme annulateur de la matrice A : soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Un petit calcul permet d'obtenir $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et de constater que $A^2 = 2I - A$, ce qu'on peut écrire $A + A^2 = 2I$, ou encore $\frac{1}{2}A(A+I) = I$. Ceci suffit à montrer que A est inversible et que son inverse est $\frac{1}{2}(A+I)$. Autrement dit, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Il est maintenant temps de donner une méthode algorithmique systématique pour déterminer l'inverse d'une matrice carrée donnée (ou constater qu'elle n'est pas inversible le cas échéant). Cet algorithme, connu sous le nom de pivot de Gauss, est un peu lourd à décrire (et à appliquer aussi) mais représente la méthode la plus raisonnable pour calculer les inverses de façon efficace. On retrouvera le même algorithme au paragraphe suivant pour la résolution de systèmes linéaires.

Définition 15. Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'une matrice sont les suivantes :

- échange des lignes i et j, noté $L_i \leftrightarrow L_j$
- multiplication d'une ligne par une constante non nulle, noté $L_i \leftarrow aL_i$ ($a \neq 0$)
- combinaison des lignes i et j, noté $L_i \leftarrow L_i + bL_j$ ($b \in \mathbb{R}$), qui n'est rien d'autre qu'une combinaison (d'où le nom) des deux opérations précédentes.

On peut définir de même des opérations élémentaires sur les colonnes, mais nous ne nous servirons que des lignes pour le pivot de Gauss.

Proposition 8. Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice A correspondent à un produit à gauche par une matrice (inversible) donnée par le tableau suivant :

Opération sur les lignes du système	Produit de la matrice A par :
Échange $L_i \leftrightarrow L_j$	$\begin{matrix} \\ \\ \\ (L_i) \\ \\ \\ \\ (L_j) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Produit par un réel $L_i \leftarrow \alpha L_i$	$\begin{matrix} \\ \\ \\ (L_i) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Combinaison linéaire $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$	$\begin{matrix} \\ \\ (L_i) \\ \\ (L_j) \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \cdots & \alpha & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Théorème 2. Toute matrice inversible peut être transformée par une succession d'opérations élémentaires sur ses lignes en la matrice identité I_n.

Démonstration. Nous n'allons pas prouver ce théorème fondamental, mais simplement donner une méthode algorithmique pour effectuer la transformation. Notons toutefois que ce théorème donne effectivement un moyen de calculer l'inverse de la matrice A. Si on effectue une succession d'opérations correspondant à des matrices B_1 ; B_2 ; $\dots$; B_k pour obtenir finalement la matrice I_n, on aura donc $B_k B_{k-1} \dots B_1 A = I_n$, ce qui prouve que la matrice A est inversible, d'inverse $A^{-1} = B_k \dots B_1$. Il suffit donc de reprendre les mêmes opérations élémentaires (dans le même ordre) à partir de la matrice identité pour obtenir la matrice A^{-1}. □

Algorithme du pivot de Gauss : Pour inverser une matrice carrée A, on effectue successivement les opérations suivantes :

- Si besoin est, on échange la ligne L_1 avec une ligne L_i sur laquelle le coefficient a_{i1} est non nul (s'il n'y a pas de tel coefficient non nul, la matrice contient une colonne nulle et ne peut pas être inversible).

- À l'aide de combinaisons du type $L_i \leftarrow a_{11}L_i + a_{i1}L_1$, on annule tous les coefficients a_{i1}, pour $i \geqslant 2$ (on peut le faire car a_{11}, qui sera appelé pivot de l'opération, est désormais non nul).
- On reprend l'algorithme sur la sous-matrice formée des $n-1$ dernières lignes jusqu'à obtenir une matrice triangulaire supérieure.
- Si la matrice triangulaire obtenue a un coefficient diagonal nul, elle n'est pas inversible, et la matrice A non plus.
- Si tous les coefficients diagonaux sont non nuls, on annule les coefficients au-dessus de la diagonale à l'aide de pivots situés sur la diagonale, en commençant par annuler la dernière colonne (à l'aide du coefficient a_{nn}), puis l'avant-dernière (à l'aide de $a_{n-1,n-1}$) etc, de façon à ne pas faire réapparaitre de coefficients non nuls ailleurs que sur la diagonale.
- On obtient ainsi une matrice diagonale, il ne reste qu'à multiplier chaque ligne par une constante pour trouver l'identité.
- On reprend les mêmes opérations (ou on les effectue en parallèle) en partant de la matrice identité pour déterminer A^{-1}.

Nous allons calculer l'inverse de la matrice suivante en utilisant le pivot de Gauss : à gauche, les opérations sur la matrice A, à droite les mêmes opérations à partir de I pour obtenir l'inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow -L_2$$

Conclusion de ce long calcul : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition 16. Deux matrices sont **équivalentes par lignes** si on peut passer de l'une à l'autre par opérations élémentaires sur les lignes. On le note $A \sim_L B$. Remarquons qu'une matrice A est inversible si et seulement si $A \sim_L I_n$.

Remarque 11. On peut interpréter l'inversion de matrice en termes de réciproque d'applications de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Par exemple, le calcul que nous venons d'effectuer prouve que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + 2y - z; 2x + 4y - z; -2x - 5y + 3z) \end{array}$ est bijective, de réciproque g :

$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto (7x-y+2z; -4x+y-z; -2x+y) & \end{array}$. En effet, si on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, l'application f peut se décrire plus simplement sous la forme $f(X) = AX$, et g par $g(X) = A^{-1}X$. Il est alors immédiat que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont toutes deux égales à l'identité. Nous reviendrons longuement sur ce genre de calcul quand nous verrons le lien entre applications linéaires sur un espace vectoriel et matrices.

Définition 17. Le **rang** d'une matrice est le nombre de pivots de la matrice triangulaire supérieure obtenue après la première partie du pivot de Gauss. Notons qu'une matrice est inversible si et seulement si son rang est égal à n. On peut également parler de rang d'un système, nous reviendrons sur cette notion plus tard (oui, encore une fois, quand on sera plongés jusqu'au cou dans les espaces vectoriels).

4 Systèmes linéaires

Définition 18. Une **équation linéaire** à n inconnues x_1, x_2, …, x_n est une équation du type $a_1x_1 + \dots a_nx_n = b$, avec $(a_1, \dots, a_n, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Définition 19. Un **système** de p équations linéaires à n inconnues est constitué de p équations du type précédent. On le note habituellement de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}x_1 & + & a_{p2}x_2 & + & \dots & a_{pn}x_n & = & b_p \end{array} \right.$$

Remarque 12. Autrement dit, on note a_{ij} le coefficient de l'inconnue x_j dans la i-ème équation. Cette notation fait évidemment le lien avec la notation matricielle, comme on va le préciser plus loin.

Définition 20. Une **solution** d'un système de p équations à n inconnues est un n-uplet de réels $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ vérifiant simultanément les p équations du système.

Définition 21. Un système est **incompatible** s'il n'admet aucune solution. Un système est appelé **système de Cramer** s'il admet exactement une solution.

Exemple : Le système suivant est un système incompatible :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & 7 \\ 2x & - & 5y & + & z & = & -4 \\ 3x & - & 3y & - & 2z & = & 1 \end{array} \right.$$

En effet, si l'on effectue la somme des deux premières lignes et que l'on soustrait la troisième, on obtient $0 = 2$, ce qui est impossible.

Définition 22. Un système linéaire est **homogène** si tous les coefficients apparaissant dans son second membre (ceux que nous avons noté b_i un peu plus haut) sont nuls. Le **système homogène associé** à un système d'équation linéaires est le système obtenu en remplaçant chaque second membre par 0.

Remarque 13. Vous ne manquerez pas de remarquer la similarité de vocabulaire entre les systèmes linéaires et les équations différentielles linéaires. Ce n'est pas un hasard du tout, il y a effectivement un regroupement théorique possible entre ces notions a priori assez éloignées. Sans rentrer dans les détails (on aurait bien du mal pour l'instant), l'ensemble des solutions est dans les deux cas un sous-espace affine (non, non, je ne vous définirai pas ce que c'est), ce qui revient à dire qu'on peut les décrire par le schéma suivant : toutes les solutions sont obtenues en faisant la somme d'une solution particulière et de toutes les solutions de l'équation homogène associée.

Définition 23. La **matrice associée** au système est la matrice de ses coefficients $A = (a_{ij})$. Si on note les inconnues sous forme de matrice-colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, et le second membre également : $X = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, le système est alors simplement équivalent à l'équation matricielle $AX = B$.

Définition 24. La **matrice augmentée** associée au système, et notée $A \mid B$, est simplement la matrice à n lignes et $p+1$ colonnes obtenues en rajoutant à la matrice A une dernière colonne égale à la matrice B. Comme on manipulera les deux matrices A et B séparément au sein de la matrice augmentée, on peut indiquer la séparation par une barre verticale à l'intérieur de la matrice.

Définition 25. Un système linéaire est **carré** s'il possède autant d'équations que d'inconnues, ce qui revient à dire que la matrice qui lui est associée est carrée. De même, un système est dit **triangulaire** si la matrice associée est triangulaire (généralement triangulaire supérieure).

Théorème 3. Un système linéaire carré est de Cramer si et seulement si sa matrice associée A est inversible. Dans ce cas, l'unique solution du système est donnée par $X = A^{-1}B$.

Remarque 14. Autrement dit, le fait qu'un système ait une solution unique ou non ne dépend que des coefficients de chaque équation, mais pas de son second membre.

Démonstration. Il y a un sens évident : si la matrice est inversible, il suffit de multiplier l'égalité $AX = B$ à gauche par A^{-1} pour obtenir le résultat. L'autre sens découlera de l'application de l'agorithme du pivot de Gauss pour la résolution des systèmes. □

Définition 26. Deux systèmes linéaires sont **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.

Définition 27. Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système sont les mêmes que celle que nous avons définies sur les matrices.

Proposition 9. Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système le transforment en système équivalent.

Algorithme du pivot de Gauss sur les systèmes : L'algorithme est rigoureusement le même que pour l'inversion des matrices, à ceci près qu'on a beaucoup moins de travail. En effet, il suffit de transformer le système en système triangulaire, et de « remonter » ensuite le système pour le résoudre.
Exemple : nous allons résoudre un système à 4 équations et 4 inconnues en suivant scrupuleusement l'algorithme décrit :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ 2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 \\ -x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - 3L_3 \\ L_4 \leftarrow L_1 + 3L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 \\ & & 11y & & & + & t & = & 26 \\ & & y & + & 12z & - & 7t & = & -26 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 11L_2 - 7L_3 \\ L_4 \leftarrow L_2 - 7L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 \\ & & & & -66z & + & 48t & = & 192 \\ & & & & -90z & + & 54t & = & 216 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow 90L_3 - 66L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 \\ & & & & -66z & + & 48t & = & 192 \\ & & & & & & 756t & = & 3024 \end{array}\right.$$

En remontant le système, on obtient $t = 4$, puis $-66z = 192-48t = 0$, donc $z = 0$; $7y = 34+6z-5t = 14$, donc $y = 2$, et enfin $3x = 7 - y + 3z - 2t = -3$, donc $x = -1$. Le système a donc une unique solution : $\mathcal{S} = \{(-1; 2; 0; 4)\}$.

On ne peut qu'être un peu frustré d'avoir fait des calculs si compliqués pour une solution aussi simple. On peut en fait les réduire grandement en utilisant le pivot de façon plus subtile, c'est-à-dire en choisissant un bon pivot à chaque étape. Par exemple :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ 2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 \\ -x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 \end{array}\right. \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ 2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 \\ -x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 3L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\ L_4 \leftarrow L_1 + L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ & & -7y & + & 6z & - & 5t & = & -34 \\ & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 \\ & & -2y & + & 6z & - & 4t & = & -20 \end{array}\right. \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 \\ & & -7y & + & 6z & - & 5t & = & -34 \\ & & -2y & + & 6z & - & 4t & = & -20 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 7L_2 - L_3 \\ L_4 \leftarrow 2L_2 - L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 \\ & & & & 22z & - & 16t & = & -64 \\ & & & & 2z & - & 2t & = & -8 \end{array}\right. \quad L_4 \leftarrow L_3 - 11L_4$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 \\ & & & & 22z & - & 16t & = & -64 \\ & & & & & & 6t & = & 24 \end{array}\right.$$

On retrouve bien évidemment la même solution que tout à l'heure.

Exemple : Il existe d'autres façons de résoudre les systèmes, ou plutôt d'autres façons de présenter le même calcul. On peut évidemment faire un calcul d'inverse de la matrice A associée au système puis calculer $A^{-1}B$, mais c'est extrêmement lourd dans la mesure où le pivot de Gauss matriciel demande déjà de faire deux fois les mêmes opérations sur les lignes, à partir de A et à partir de I. Pour plus d'efficacité, on peut faire intervenir la matrice augmentée : on effectue le pivot sur la matrice augmenté, en cherchant à transformer ce qui se trouve à gauche (la matrice A) en I_n (et en modifiant simultanément la dernière colonne ajoutée), et les valeurs obtenues sur la dernière colonne une fois la transformation terminée seront tout simplement les valeurs prises par les différentes inconnues dans l'unique solution du système. Prenons un exemple pas trop méchant avec le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 3 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 6 \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 3 \\ 2 & -1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 2 & 1 & | & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & -3 & 3 & | & -6 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow -L_2/3 \\ L_3 \leftarrow L_3/3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

On peut simplement conclure que le système a pour unique solution $\{(1, 2, 0)\}$.

Remarque 15. On peut bien sûr également utiliser, de façon symétrique, les techniques de résolution de systèmes pour inverser des matrices. Ainsi, on peut exploiter le fait que $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$ pour calculer A^{-1} : on part du système ayant pour matrice A et un second membre inconnu B (par exemple, si la matrice est carrée d'ordre 3, on notera a, b et c les trois valeurs du second membre), et on résout le système, c'est-à-dire qu'on exprime x, y et z en fonction de a, b et c. Les coefficients obtenus seront alors ceux de A^{-1}. Cette méthode est particulièrement rapide si on est à l'aise avec les opérations « efficaces » sur les systèmes. Calculons par exemple l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (c'est la matrice du système résolu dans l'exercice précédent) avec cette méthode : on part du système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & a \\ 2x & - & y & + & z & = & b \\ 2x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right.$. En effectuant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, on obtient immédiatement le système triangulaire $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & a \\ & - & 3y & + & 3z & = & b - 2a \\ & & & & 3z & = & c - 2a \end{array}\right.$. On peut donc simplement remonter le système : $z = -\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}c$, puis $y = \frac{2a - b}{3} + z = -\frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$ et enfin $x = a + z - y = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b$. Il ne reste plus qu'à mettre les coefficients (dans le bon ordre) dans une matrice pour conclure que $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$