Chapitre 18 : Matrices reloaded

PTSI B Lycée Eiffel

2 mai 2014

La Matrice est universelle. Elle est omniprésente.
Elle est avec nous ici, en ce moment même. Tu la vois
chaque fois que tu regardes par la fenêtre, ou lorsque tu allumes la télévision.

Morpheus

Dans une soirée, une matrice propose à
une matrice inversible de danser avec elle :
« Ah non, désolée je ne reste pas, je suis de passage ! »

Introduction

Il est temps pour ce dernier chapitre d'algèbre linéaire de l'année de faire le lien entre les espaces vectoriels et le calcul matriciel, qui constitue un puissant outil d'étude, notamment pour les applications linéaires. À tel point d'ailleurs qu'une grande partie de votre programme d'algèbre de deuxième année sera consacrée à la diagonalisation de matrices et à ses applications. Pour cette année, nous nous contenterons de constater qu'une application linéaire entre espaces de dimension finie peut être représentée par une matrice, et que le calcul matriciel (puissances de matrices notamment) s'interprète simplement dans ce cadre.

Objectifs du chapitre :

- maîtriser les différentes techniques de calcul du rang ou du déterminant d'une matrice.
- comprendre ce que représente la matrice d'une application linéaire dans une base donnée, et être capable de reconstituer une telle matrice à l'aide de matrices de passages ou de calculs d'images de vecteurs.

1 Matrices et applications linéaires

1.1 Matrice d'une application linéaire

Une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ étant caractérisée par les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, ou encore par les coordonnées de ces images dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$, on peut tout savoir d'une application linéaire en connaissant simplement n fois p coordonnées. C'est ce qui va permettre de créer un lien entre applications linéaires et matrices, et de justifier l'introduction de calcul matriciel effectuée dans un précédent chapitre, toutes les opérations sur les matrices s'interprétant naturellement en termes d'applications linéaires.

Définition 1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. La **matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$** est la matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j ème colonne est composée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$. Autrement dit, si $u_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, alors $M_{i,j} = \lambda_i$.

Définition 2. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F (on suppose donc dans tout ce paragraphe que les espaces vectoriels E et F sont de dimension finie). La **matrice représentative de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** est la matrice de la famille $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ dans la base $\mathcal{C}$. On la note $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (4x - 3y + z, -2x + y - 5z)$, la matrice de f dans les bases canoniques est $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Remarque 1. Dans le cas d'un endomorphisme, on prendra souvent $\mathcal{C} = \mathcal{B}$, et on notera simplement la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 1. En gardant les notations précédentes, si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice-colonne des coordonnées dans $\mathcal{B}$ d'un élément $x \in E$ et $f(X) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ celle des coordonnées de son image dans $\mathcal{C}$, alors $f(X) = MX$, où M est la matrice représentant f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Démonstration. En effet, on a $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, et par définition de la matrice M, on a $f(e_i) = \sum_{j=1}^{p} m_{ji} f_j$. On a donc $f(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{p} m_{ji} f_j = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i m_{ji} \right) f_j$. Or, l'unique terme de la j-ème ligne de la matrice colonne MX vaut précisément $\sum_{i=1}^{n} m_{ji} x_i$, donc l'égalité demandée est bien vérifiée. □

Proposition 2. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et M la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, alors la matrice de λf dans ces mêmes bases est λM.
De même, si $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$, et M, N leurs matrices respectives, la matrice de $f + g$ est $M + N$.
Plus intéressant, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, et M, N leurs matrices respectives, alors la matrice de $g \circ f$ est NM.

Démonstration. En effet, si $f(X) = MX$ et $g(X) = NX$, $\lambda f(X) = \lambda MX$; $f(X) + g(X) = MX + NX = (M + N)X$ et, lorsque cela a un sens, $g \circ f(X) = g(MX) = NMX$. □

Exemple : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par $(x, y, z) \mapsto (x - y, 2x + z)$, et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie par $(x, y) \mapsto (x + y, 3x - y, -x + 2y)$. Les matrices respectives de ces deux applications linéaires dans les bases canoniques sont $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Comme $NM = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, on peut en déduire que $g \circ f(x, y, z) = (3x - y + z, x - 3y - z, 3x + y + 2z)$.

Proposition 3. Un endomorphisme est bijectif si et seulement si sa matrice M dans une base $\mathcal{B}$ est inversible. Dans ce cas, la matrice de f^{-1} dans cette même base est M^{-1}.

Démonstration. C'est une application immédiate du dernier point de la proposition précédente : $f \circ f^{-1} = \text{id}$, donc en notant N la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$, $MN = I$, ce qui signifie exactement que $N = M^{-1}$. □

1.2 Changement de base

Il ne nous reste plus qu'à comprendre une chose fondamentale : comment déterminer la matrice de f dans une autre base $\mathcal{B}'$ si on la connait dans une base $\mathcal{B}$.

Définition 3. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ deux bases d'un même espace vectoriel E, la **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ est la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. On la note souvent $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

Proposition 4. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, alors P est une matrice inversible, et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$ est P^{-1}.

Démonstration. La matrice P peut être vue différemment : il s'agit de la matrice de l'application identité dans les bases $\mathcal{B}'$ (au départ) et $\mathcal{B}$ (à l'arrivée). En effet, les colonnes de P contiennent exactement les coordonnées des vecteurs g_j dans la base $\mathcal{B}$. Si on note Q la matrice de cette même application identité dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ (qui est aussi la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$), le produit des deux matrices représentera l'application identité dans la base $\mathcal{B}'$, au départ comme à l'arrivée. Mais cette dernière matrice est évidemment la matrice I, donc $QP = I$, ou encore $Q = P^{-1}$. □

Proposition 5. Soit $x \in E$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice-colonne de ses coordonnées dans une base $\mathcal{B}$, et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ la matrice-colonne de ses coordonnées dans une seconde base $\mathcal{B}'$. Alors $X = PX'$ (ou $X' = P^{-1}X$), où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Démonstration. Explicitons les hypothèses utiles : $x = \sum_{j=1}^{n} x'_j g_j$ (en gardant les notations utilisées plus haut pour les vecteurs des deux bases), et $g_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$, donc $x = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \right) e_i$. Par unicité de la décomposition dans une base, on peut en déduire que $x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j$, soit exactement $X = PX'$. □

Théorème 1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F. En notant $M = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, $M' = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{C}'$, alors $M' = Q^{-1}MP$. En particulier, dans le cas d'un endomorphisme, $Mat_{\mathcal{C}}(f) = P^{-1}\, Mat_{\mathcal{B}}(f) P$, où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

Démonstration. Sans expliciter les calculs, on peut exploiter les résultats précédents. Soit X la matrice-colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$, alors PX est la matrice de x dans $\mathcal{B}$, puis MPX représente la matrice de $f(X)$ toujours dans la base $\mathcal{B}$, et enfin $P^{-1}MPX$ est la matrice de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Or, NX représente également les coordonnées de $f(x)$ dans $\mathcal{B}'$, donc $NX = P^{-1}MPX$. Comme cela est vrai pour tout vecteur x, en particulier pour ceux de la base canonique, les matrices N et $P^{-1}MP$ représentent la même application linéaire dans $\mathcal{B}'$, et sont donc égales. □

Exemple : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice dans la base canonique $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, et notons $\mathcal{B} = ((1,1,-1); (1,0,-1); (1,-1,0))$. Vérifions que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$: si $(x, y, z) =$

$a(1,1,-1)+b(1,0,-1)+c(1,-1,0)$, alors $a-c=y$ et $-a-b=z$, donc $-b-c=y+z$. Comme par ailleurs $a+b+c=x$, on trouve en additionnant $a=x+y+z$, puis $c=a-y=x+z$, et $b=-a-z=-x-y-2z$. Autrement dit, la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{C}$ est $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, et $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On peut calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$: $P^{-1}MP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On peut d'ailleurs s'en rendre compte autrement, en calculant directement les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ par l'application f : $f(1,1,-1)=(1,1,-1)$; $f(1,0,-1)=(2,0,-2)=2(1,0,-1)$ et $f(1,-1,0)=(3,-3,0)$, ce qui explique que la matrice soit effectivement diagonale. Nous venons en fait d'effectuer sans le dire notre première diagonalisation de matrices, mais vous attendrez l'an prochain pour en apprendre (beaucoup) plus sur ce sujet.

Remarque 2. Un vecteur non nul u vérifiant $f(u)=\lambda u$ pour un certain réel λ est appelé **vecteur propre** de l'application f, et le réel λ est la **valeur propre** associée à u. Chercher une base dans laquelle la matrice de f devient diagonale revient exactement à cher une base constituée de vecteurs propres de f. Les techniques générales de recherches de vecteurs propres consistent en fait à chercher d'abord les valeurs propres de l'endomorphisme, qui ne peut pas en avoir plus que la dimension de l'espace E sur lequel l'application est définie.

2 Rang d'une matrice

Définition 4. Le **rang d'une matrice** $M\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est le rang de la famille constituée des vecteurs-colonnes de la matrice M (coordonnées prises par exemple dans la base canonique).

Remarque 3. Autrement dit, le rang de M est le rang de l'application linéaire qu'elle représente dans les bases canoniques (ou dans n'importe quelles autres bases).

Proposition 6. Le rang d'une matrice est toujours le même que celui de sa transposée.

Démonstration. Ce n'est pas évident à démontrer, cela découle en fait des remarques faites plus bas. Notons une conséquence évidente : si $M\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{rg}(M)\leqslant\min(n,p)$. □

Proposition 7. Une matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang n si et seulement si elle est inversible.

Proposition 8. Le rang d'une matrice est invariant par opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de la matrice.

Démonstration. C'est assez immédiat si on songe que le rang représente la dimension de l'image de l'application linéaire associée. Un échange de colonnes échange deux images sans rien changer à sa dimension. Un produit par une constante non nulle d'une colonne ne modifie sûrement pas l'espace engendré par le vecteur correspondant. Et remplacer dans une famille génératrice un vecteur par une combinaison linéaire de lui-même et d'autres vecteurs de la famille ne modifie pas non plus la dimension de l'espace vectoriel engendré. Il est plus délicat de comprendre pourquoi le rang n'est pas modifié par opérations sur les lignes, ce qui découle du fait qu'une matrice a toujours le même rang que sa transposée. Nous admettrons cette partie de la preuve. □

Exemple : On peut donc calculer le rang en appliquant une sorte de pivot de Gauss à notre matrice, jusqu'à la transformer en matrice diagonale (et même en J_r). En pratique, on se contente souvent de mélanger opérations sur les lignes et les colonnes jusqu'à obtenir une matrice dont le rang est évident. Ainsi, $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}=\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=2$ en effectuant les opérations $C_1\leftarrow C_1+C_4$ et $C_3\leftarrow C_3-3C_4$.

Démonstration. En effet, M est de rang n si l'application linéaire associée est de rang n, donc bijective. $\square$

Théorème 2. (Hors-programme) Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si $M = QJ_rP$, où P et Q sont deux matrices inversibles, et $J_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec r fois 1 et $n-r$ fois 0 sur la diagonale.

Démonstration. C'est en fait facile à prouver. Soit f l'application associée à M dans la base canonique. Puisque $\mathrm{rg}(f) = r$, son noyau est de dimension $n-r$. On peut construire une base de E de la forme $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$, où $(e_{r+1}, \dots, e_n) \in \ker(f)^{n-r}$. On sait alors (démonstration du théorème du rang) que $f_{|\,\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_r)}$ est un isomorphisme sur $\mathrm{Im}(f)$. En particulier, $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est une famille libre de E, qu'on peut compléter en base. Dans ces deux bases, l'application f a par construction pour matrice J_r. En notant P et Q les matrices de passage idoines (de la base canonique vers la première base pour P, de la deuxième base vers la base canonique pour Q), les formules de changement de base assurent que $M = QJ_rP$. $\square$

3 Déterminant

3.1 Déterminant de deux vecteurs du plan

Définition 5. Soient u et v deux vecteurs du plan ayant pour coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$, le **déterminant** de ces deux vecteurs est le nombre réel $xy' - x'y$. On le note $\det(u, v)$, ou encore $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

Remarque 4. Le déterminant représente l'aire algébrique du parallélogramme engendré par les vecteurs u et v.

Proposition 9. Deux vecteurs u et v sont colinéaires si et seulement si $\det(u, v) = 0$.

Proposition 10. Propriétés du déterminant
Le déterminant est :

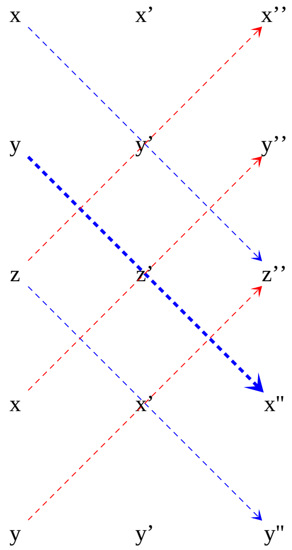
- bilinéaire : $\det(u, \lambda v + w) = \lambda \det(u, v) + \det(u, w)$ et $\det(\lambda u + v, w) = \lambda \det(u, w) + \det(v, w)$.
- antisymétrique : $\det(u, v) = -\det(v, u)$.
- alterné : $\det(u, u) = 0$.

3.2 Déterminant de trois vecteurs de l'espace

Définition 6. Soient u, v et w trois vecteurs de l'espace, leur **déterminant** (aussi appelé **produit mixte**) est le nombre réel $(u \wedge v).w$. On le note $[u, v, w]$, ou encore $\det(u, v, w)$, ou même $|u \quad v \quad w|$.

Proposition 11. Si u, v et w ont pour coordonnées respectives (x, y, z), (x', y', z') et (x'', y'', z'') dans un repère orthonormal direct de l'espace, alors $\det(u, v, w) = xy'z'' - xz'y'' + yz'x'' - yx'z'' + zx'y'' - zy'x''$.

Méthode : Pour calculer un peu plus rapidement les déterminants (et ne pas se tromper dans les signes), on peut appliquer la règle de Sarrus. On écrit le diagramme suivant :



On additionne les trois produits obtenus les long des diagonales descendantes, et on soustrait les trois produits obtenus le long des diagonales ascendantes.

Proposition 12. Trois vecteurs u, v et w sont coplanaires si et seulement si $\det(u, v, w) = 0$.

Proposition 13. On retrouve ici une interprétation géométrique du déterminant : il représente (au signe près) le volume du parallélépipède engendré par les trois vecteurs u, v et w.

Proposition 14. Propriétés du déterminant
Le déterminant est :

- trilinéaire : $\det(u, v, \lambda w + t) = \lambda \det(u, v, w) + \det(u, v, t)$, et de même pour les deux autres variables.
- antisymétrique : si on échange deux des trois vecteurs dans un déterminant, on change son signe.
- alterné : si deux des trois vecteurs u, v et w sont égaux, alors $\det(u, v, w) = 0$.

3.3 Déterminant d'une matrice carrée

Théorème 3. Il existe une unique application $f : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ qui soit multilinéaire (linéaire par rapport à chacune de ses n variables), et alternée (si deux des variables sont égales, f prend une valeur nulle), et telle que $f((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)) = 1$.

Remarque 5. La troisième propriété classique du déterminant, l'antisymétrie, n'est pas citée ici car elle est en fait équivalence à l'alternance. Supposons en effet que f soit alternée, et soient u et v deux éléments de $\mathbb{R}^n$, alors par linéarité, $f(\dots, u + v, \dots, u + v, \dots) = f(\dots, u, \dots, u, \dots) + f(\dots, u, \dots, v, \dots) + f(\dots, v, \dots, u, \dots) + f(\dots, v, \dots, v, \dots)$. Or, $f(\dots, u + v, \dots, u + v, \dots) = f(\dots, u, \dots, u, \dots) = f(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0$ à cause de l'alternance, et il reste donc $f(\dots, v, \dots, u, \dots) = -f(\dots, u, \dots, v, \dots)$, ce qui prouve bien que f est antisymétrique.

Définition 7. Cette application est appelée **déterminant** de la famille de vecteurs. On appelle de même déterminant d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le déterminant de la famille constituée de ses vecteurs colonnes.

Remarque 6. Parler de déterminant d'une matrice qui n'est pas carrée n'a aucun sens.

Démonstration. Pas de preuve de ce résultat trop compliqué à notre niveau. En fait, on peut donner une définition du déterminant qui généralise les formules vues dans les paragraphes précédents en dimensions 2 et 3, et qui fait intervenir un nombre de produits égal à $n!$ (n'essayez donc pas d'appliquer une pseudo-règle de Sarrus pour des matrices à plus de trois lignes et trois colonnes, ça ne marchera pas bien). Plus précisément, en notant $\det(A) = \sum \pm \prod_1^n a_{i,\sigma(i)}$, où la somme se fait sur toutes les permutations possibles de l'ensemble d'entiers $\{1, \dots, n\}$. Quant au signe à mettre devant le produit, il est positif si la permutation peut être obtenue en faisant un nombre pair d'échanges de deux entiers, négatif si ce nombre est impair. Cette définition est hors-programme, et de toute façon inutilisable en pratique. □

Théorème 4. Une matrice M est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Démonstration. Nous ne pouvons évidemment pas faire une démonstration générale de ce résultat fondamental. on peut toutefois s'en sortir pour des matrices d'ordre 2. Considérons donc $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et étudions plusieurs cas :

- si a et c sont nuls tous les deux, la matrice n'est pas inversible, et elle a pour déterminant $0d - 0b = 0$.
- sinon, on applique le pivot de Gauss (quitte à échanger les deux lignes, ce qui ne change que le signe du déterminant et donc pas le fait qu'il soit nul ou non) : $L_2 \leftarrow cL_1 - aL_2$, pour obtenir la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix}$. Cette matrice est inversible si et seulement si $a \neq 0$ (ce qui est déjà supposé) et $ad - bc \neq 0$, soit $\det(M) \neq 0$.

□

Proposition 15. Propriétés élémentaires du déterminant.

- $\det({}^tA) = \det(A)$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- Si A est inversible, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Démonstration. Pas de démonstration. On peut encore une fois vérifier que ça marche en dimension 2 ou même 3, mais pas généraliser. □

Remarque 7. Le déterminant d'une matrice diagonale est simplement le produit de ses éléments diagonaux. En fait, c'est aussi le cas pour une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure), ce qui justifie les techniques de calcul présentées ci-dessous.

Proposition 16. Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice ont l'effet suivant sur son déterminant :

- l'échange de deux lignes change le signe du déterminant.
- le produit d'une ligne par une constante λ multiplie le déterminant de la matrice par la même constante λ.
- une combinaison ne change pas le déterminant de la matrice.

On a exactement les mêmes propriétés pour les opérations sur les colonnes (on peut combiner les deux sans problème dans un calcul de déterminant).

Proposition 17. Développement suivant une ligne d'un déterminant.

$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_j$, où D_j désigne le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant de la matrice A la ligne numéro i et la colonne numéro j.

Exemple : Sur une matrice d'ordre 3, on trouvera $\det(A) = -d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$

Exemple : Pour calculer le déterminant $\begin{vmatrix} bc & ac & ab \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, où a, b et c sont trois constantes quelconques, on peut commencer par soustraire la première colonne à chacune des deux autres puis factoriser et enfin développer suivant la dernière ligne : $\begin{vmatrix} bc & ac & ab \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & (a-b)c & (a-c)b \\ a & b-a & c-a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)\begin{vmatrix} bc & c & b \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)\begin{vmatrix} c & b \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c)$.

Définition 8. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, le **déterminant** de l'application f est celui de sa matrice représentative A dans n'importe quelle base de E.

Démonstration. Ce déterminant est effectivement indépendant de la base choisie : si A et A' sont deux matrices représentant une même application linéaire, on sait que $A' = P^{-1}AP$, où P est une matrice de passage inversible, donc $\det(A') = \det(P^{-1}) \times \det(A) \times \det(P) = \det(A)$ puisque $\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$. □

Remarque 8. Un endomorphisme en dimension finie est bijectif si et seulement son déterminant est non nul.