Chapitre 2 : Fonctions usuelles

PTSI B Lycée Eiffel

23 septembre 2013

Logarithme et exponentielle dînent ensemble au resto.
C'est exponentielle qui paye toute la note, pourquoi ?
Parce que logarithme népérien !

Ce deuxième chapitre de l'année a pour principal objectif de constituer un catalogue des fonctions que nous considérerons comme suffisamment classiques pour que leur maîtrise soit indispensable. Certaines de ces fonctions ont déjà été étudiées au lycée (logarithme népérien et exponentielle), les autres ne font intervenir aucune théorie supplémentaire, si ce n'est la notion de bijection qui sera abordée en début de chapitre. Nous reverrons également à l'occasion de ce chapître quelques propriétés de la dérivation, thème que nous reprendrons nettement plus en profondeur un peu plus tard dans l'année.

Objectifs du chapitre :

- maîtrise du vocabulaire classique sur les fonctions, et capacité à calculer sans erreur et rapidement toute dérivée faisant intervenir les formules classiques de dérivation.
- maîtrise des règles de calcul sur l'exponentielle, le logarithme et les puissances : résolution d'équations se ramenant à du second degré, manipulation aisée des racines carrées.
- connaissance des dérivées et représentations graphiques des fonctions hyperboliques.

1 Généralités

1.1 Domaine de définition

Définition 1. Une **fonction** $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$ est un objet mathématique associant à tout réel x appartenant à un sous-ensemble $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$, un réel y également noté $f(x)$. L'ensemble $\mathcal{D}_f$ est appelé **domaine de définition** de la fonction f.

Méthode : Pour déterminer un domaine de définition, on fera notamment attention au trois problèmes suivants :

- annulation d'un dénominateur : si $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$, alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$.
- positivité sous une racine : si $f(x) = \sqrt{4-2x}$, alors $\mathcal{D}_f =]-\infty; 2]$.
- stricte positivité sous un ln : si $f(x) = \ln(x^2-9)$, alors $\mathcal{D}_f =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$

1.2 Parité, périodicité

Définition 2. Une fonction f est **paire** si son domaine de définition est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$. Elle est **impaire** si son domaine de définition est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Remarque 1. La condition sur la symétrie de l'ensemble de définition est nécessaire pour assurer que $-x$ appartienne toujours au domaine de définition de f.

Méthode : Pour prouver qu'une fonction est paire (ou impaire), on exprime $f(-x)$ en fonction de x et on essaie de le mettre sous une forme permettant de constater que $f(-x) = f(x)$. Pour prouver qu'une fonction n'est pas paire, il suffit de trouver un contre-exemple, donc une valeur de x pour laquelle $f(-x) \neq f(x)$. Attention tout de même, le fait que $f(-2) = f(2)$ par exemple ne prouve rien.

Proposition 1. La courbe représentative d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe (Oy) du repère. La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine 0 du repère.

Démonstration. Graphiquement, la parité s'exprime comme ceci : si un point $A(x; f(x))$, le point $A'(-x, f(x))$ appartiendra également à la courbe (et vice-versa). Or, A' n'est autre que le symétrique de A par rapport à l'axe (Oy). Le raisonnement est le même pour les fonctions impaires. □

Définition 3. Une fonction f est périodique de période T si, quel que soit x appartenant à $\mathcal{D}_f$, $x + T$ appartient à $\mathcal{D}_f$ et $f(x + T) = f(x)$.

Remarque 2. Une fonction périodique possède plusieurs périodes différentes, puisque tout multiple d'une période est également une période. Ainsi, la fonction cos est périodique de période 2π, mais aussi 4π ou encore -56π. Il existe toutefois toujours une période qui sera la plus petite période positive de la fonction f, et qu'on appelle par abus de langage la période de la fonction f.

Proposition 2. La courbe représentative d'une fonction f périodique de période T est invariante par translation de vecteur $T\overrightarrow{i}$.

Démonstration. Le point $(x, f(x))$ ayant pour image par cette translation le point $(x+T, f(x))$, c'est une conséquence immédiate de la définition. □

1.3 Monotonie

Définition 4. Une fonction réelle f est **croissante** (resp. **décroissante**) sur un intervalle I si, $\forall (x, y) \in I^2$, $x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$ (resp. $f(x) \geqslant f(y)$). Je vous épargne les définitions de croissance et décroissance stricte.

Définition 5. Une fonction réelle f admet un **maximum** (local) en x sur l'intervalle I si $x \in I$ et $\forall y \in I$, $f(y) \leqslant f(x)$. On parle de **maximum global** si $I = \mathcal{D}_f$. On définit de même **minimum local et global**.

Définition 6. Le réel m est un **minorant** de la fonction f sur l'intervalle I si $\forall x \in I$, $f(x) \geqslant m$. De même, M est un **majorant** de f sur I si $\forall x \in I$, $f(x) \leqslant M$. On dit que f est bornée sur I si elle y admet à la fois un majorant et un minorant.

Proposition 3. La somme de deux fonctions croissantes (respectivement décroissantes) sur un même intervalle I est croissante (resp. décroissante) sur I.

Démonstration. C'est évident à partir de la définition : si $f(x) \leqslant f(y)$ et $g(x) \leqslant g(y)$, alors $f(x) + g(x) \leqslant f(y) + g(y)$. □

Définition 7. Si f est une fonction définie sur un intervalle I et g une fonctions définie sur $f(I)$, alors la **composée** de f et de g est la fonction définie $g \circ f$ sur I par $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Proposition 4. Si les fonctions f et g sont de même monotonie sur I et sur $f(I)$ respectivement, alors $g \circ f$ est croissante sur I.
Si les fonctions f et g sont de monotonie opposée sur I et sur $f(I)$ respectivement, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.

Démonstration. C'est là encore très facile : si par exemple les deux fonctions sont décroissantes, $x \leqslant y$ implique $f(x) \geqslant f(y)$, puis par décoirssance de g sur $f(I)$, on trouve $g(f(x)) \leqslant g(f(y))$, donc $g \circ f$ est décroissante. Les autres cas sont très similaires. □

Exemple : La fonction $f : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de deux fonctions croissantes.

1.4 Variations

Commençons par l'essentiel : un petit tableau récapitulatif des dérivées à connaitre sur le bout des doigts, incluant les dérivées de fonctions usuelles ainsi que les formules de dérivation classiques :

fonction	dérivée	$\mathcal{D}_f$	$\mathcal{D}_{f'}$	condition
k	0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$c \in \mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}^*$
$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{n}{x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$n \in \mathbb{N}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$u+v$	$u'+v'$			
uv	$u'v+uv'$			
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$			
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$			
$g \circ f$	$f' \times g' \circ f$			

Remarque 3. Cette dernière formule (dérivation d'une composée) généralise d'un seul coup tous les cas particuleirs que vous avez pu voir au lycée, notamment $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$ et $(e^u)' = u'e^u$.

Théorème 1. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I, et f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors si f' est strictement positive sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, la fonction f est strictement croissante sur I. De même, si f' est strictement négative sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, f est strictement décroissante sur I.

Proposition 5. Soit f une fonction dérivable en un point a, alors la tangente à la courbe représentative en son point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Démonstration. En effet, cette droite a une équation de la forme $y = \alpha x + \beta$, et doit vérifier deux conditions : elle a pour coefficient directeur $f'(a)$, donc $\alpha = f'(a)$, et elle doit passer par le point de la courbe de coordonnées $(a, f(a))$, donc $f(a) = \alpha a + \beta$, soit $\beta = f(a) - \alpha a = f(a) - af'(a)$. L'équation est donc $y = f'(a)x + f(a) - af'(a) = f'(a)(x-a) + f(a)$. □

1.5 Bijections

Définition 8. Une fonction $f : I \to J$ est une **bijection** de l'intervalle I dans l'intervalle J si tout élément de J admet exactement un antécédent par la fonction f dans l'intervalle I.

Définition 9. Si f est une fonction bijective de I dans J, on appelle **bijection réciproque** de f la fonction $g : J \to I$ qui, à un réel y appartenant à I, associe son unique antécédent x par la fonction f. L'application g est alors une bijection de l'intervalle J dans l'intervalle I. On la note f^{-1}.

Exemple : La notion de réciproque est intuitivement simple, il s'agit simplement de créer une fonction g qui « fait le contraire » de la fonction f. Mais pour cela, la condition sur l'unicité des antécédents est indispensable, sinon on aura plusieurs possibilités pour la définition de la fonction g. Un exemple que vous connaissez déjà est celui de la racine carrée, qui est la réciproque de la fonction carré $f : x \mapsto x^2$. Attention tout de même, la fonction f n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, puisque les réels négatifs n'ont pas d'antécédent par f, mais que les réels strictement positifs en ont deux. Par contre, cette même fonction f est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. C'est pour cela que la racine carrée est une fonction définie seulement sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (dans la définition de la racine carrée, on précise bien qu'il s'agit d'un nombre positif).

Remarque 4. Pour tout x appartenant à I, on a $f^{-1}(f(x)) = x$; pour tout x dans J, $f(f^{-1}(x)) = x$. De plus, les représentations graphiques des fonctions f et f^{-1} dans un repère orthogonal sont des courbes symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Théorème 2. Soit $f : I \to J$ une fonction continue et strictement monotone. Alors f effectue une bijection de I dans J. De plus, sa réciproque f^{-1} est également continue et strictement monotone, de même monotonie que f.

Proposition 6. Soit $f : I \to J$ une bijection dérivable sur I et telle que $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$, alors sa bijection réciproque est dérivable sur J et $\forall y \in J,\ (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Exemple : Si on reprend l'exemple de la racine carrée, on trouve en utilisant le fait que $(x^2)' = 2x$, la formule bien connue $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2 Logarithmes et exponentielles

Éternel dilemme du professeur de maths au moment d'aborder cette partie du cours : exponentielle d'abord ou logarithme en premier ? Quel que soit le choix, soyez conscients que la construction s'appuiera à ce stade sur des résultats puissants que nous ne serons pas en mesure de démontrer : existence d'une primitive à une fonction continue pour le logarithme, existence d'une solution à une équation différentielle pour l'exponentielle. Nous commencerons avec le logarithme (c'est le plus traditionnel) car les démonstrations sont plus faciles à enchaîner dans ce sens, mais je vous donnerai également des définitions indépendantes de l'exponentielle.

2.1 La fonction logarithme népérien

Définition 10. La fonction ln (**logarithme népérien**) est l'unique primitive de la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ s'annulant pour $x = 1$.

Proposition 7. Principales propriétés de la fonction ln :

- Pour tous nombres réels strictement positifs x et y, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
- Les formules suivantes découlent de la première propriété : $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$; $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$; pour tout entier relatif n, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.
- La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
- Il existe un unique réel, noté e, vérifiant $\ln(e) = 1$.

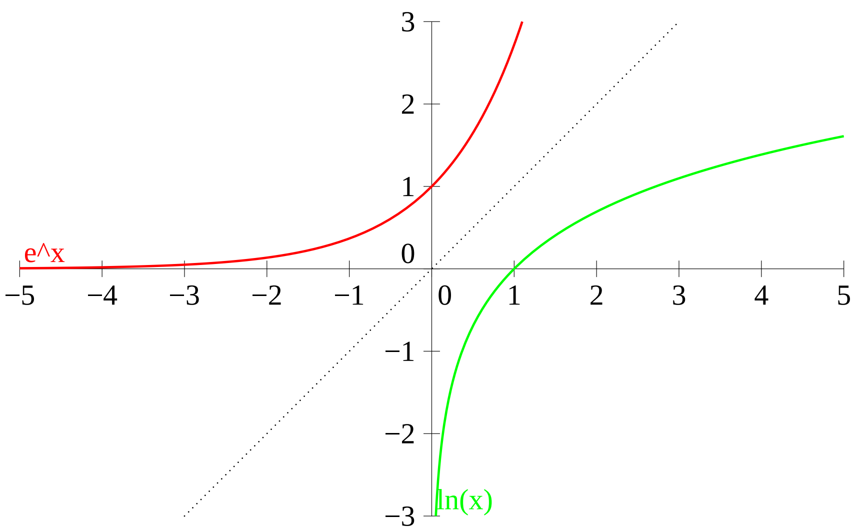
Démonstration.

- Puisque tout ce que nous savons pour l'instant sur le logarithme est qu'il est une primitive de $\dfrac{1}{x}$, la démonstration va passer par une dérivation. Fixons donc une valeur de $y > 0$, et posons $g(x) = \ln(xy) - \ln(x) - \ln(y)$. La fonction g est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{y}{xy} - \dfrac{1}{x} = 0$. La fonction g est donc constante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme $g(1) = \ln(y) - \ln(1) - \ln(y) = 0$, on en déduit que $\forall x > 0$, $\ln(x+y) - \ln(x) - \ln(y) = 0$, ce qui est équivalent à notre propriété.

- En choisissant $y = \dfrac{1}{x}$ dans la formule précédente, on obtient $\ln(1) = \ln(x) + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$, soit $\ln(x) + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$, ce qui prouve le premier point. Il suffit ensuite d'écrire $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \dfrac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ pour obtenir le deuxième. La dernière formule se prouve, pour les valeurs positives de n, par récurrence. Pour $n = 0$, $\ln(x^0) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(x)$. Ensuite, si on suppose vraie la proptiété au rang n, alors $\ln(x^{n+1}) = \ln(x^n \times x) = \ln(x^n) + \ln(x) = n\ln(x) + \ln(x) = (n+1)\ln(x)$, ce qui prouve l'hérédité de la propriété. Pour les valeurs négatives de n, on écrit simplement $\ln(x^{-n}) = \ln\left(\dfrac{1}{x^n}\right) = -\ln(x^n) = -n\ln(x)$.
- Sa dérivée étant strictement positive, c'est clair.
- La fonction étant croissante, elle admet nécessairement une limite (finie ou infinie) en $+\infty$, il suffit donc de prouver qu'elle n'est pas majorée pour obtenir une limite infinie. Or, en prenant un x pour lequel $\ln(x) > 0$ (par exemple $x = 2$), on a $\ln(x^n) = n\ln(x)$, qui a pour limite $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. La fonction ne peut donc être majorée, et $\ln_{x\to+\infty}(x) = +\infty$. En posant $X = \dfrac{1}{x}$, on a alors $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\lim_{X\to+\infty} \ln(X) = -\infty$.
- La fonction ln étant continue et strictement croissante, et au vu des limites calculées précédemment, elle effectue une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}$. Le nombre réel 1 admet donc un unique antécédent par la fonction ln.

$\square$

Ajoutons la courbe représentative de la fonction, que je couple avec celle de la fonction exponentielle que nous allons maintenant aborder.



2.2 La fonction exponentielle

Définition 11. La **fonction exponentielle**, que l'on notera exp, est définie sur $\mathbb{R}$ comme la réciproque de la fonction ln.

Remarque 5. On peut définir la fonction exponentielle de façon indépendante, sans référence au logarithme. Par exemple, la fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle et vérifiant de plus $f' = f$. Une autre définition nettement plus maniable mais faisant intervenir des séries (vous la reverrez l'an prochain) est la suivante : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Proposition 8. Principales propriétés de la fonction exponentielle :

- La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est la fonction exponentielle elle-même.
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.
- Pour tous nombres réels x et y, $\exp(x+y) = \exp(x)\times\exp(y)$. En particulier, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$, et $(\exp(x))^n = \exp(nx)$. Pour tout entier n, $\exp(n) = e^n$ (où e, rappelons-le, est l'unique réel vérifiant $\ln(e) = 1$; on étendra comme vous en avez l'habitude la notation e^x à toutes les valeurs de l'exponentielle).

Démonstration.

- On peut appliquer le théorème de la bijection rappelé plus haut. La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, et de même monotonie que ln. De plus, sa dérivée est donnée par $\exp'(x) = \dfrac{1}{\ln'(\exp(x))} = \exp(x)$.
- Les limites découlent également du théorème de la bijection.
- Le but ici est d'utiliser les règles de calcul vues sur le logarithme. Notons a et b les antécédents (uniques à chaque fois par bijectivité du ln) de x et y par la fonction ln, on peut écrire $\exp(x+y) = \exp(\ln(a)+\ln(b)) = \exp(\ln(ab)) = ab = \exp(x)\times\exp(y)$. Comme $\ln(1) = 0$, on a par ailleurs $\exp(0) = 1$, donc $\exp(x)\times\exp(-x) = \exp(x-x) = 1$, soit $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ (on peut aussi revenir au logarithme pour démontrer cette formule). Ensuite, $\exp(nx) = \exp(n\ln a) = \exp(\ln(a^n)) = a^n = (\exp(x))^n$. En particulier, $\exp(n) = (\exp(1))^n = e^n$, puisque $\ln(e) = 1 \Leftrightarrow \exp(1) = e$.

$\square$

2.3 Fonctions logarithmes et exponentielles quelconques

Définition 12. Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, la fonction **logarithme en base** a est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Remarque 6. La fonction ln correspond en fait au logarithme en base e. Un autre logarithme est assez fréquemment employé, le logarithme en base 10, aussi appelé logarithme décimal et noté simplement log (c'est à cette fonction que correspond la touche log des calculatrices).

Proposition 9. Principales propriétés des fonctions logarithmes :

- Lorsque $a > 1$, la fonction $\log_a$ est strictement croissante et admet les mêmes limites que le logarithme népérien.
- Lorsque $0 < a < 1$, la fonction $\log_a$ est strictement décroissante ; $\displaystyle\lim_{x\to0} \log_a(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty$.
- Toutes les règles de calcul vues sur le logarithme népérien restent valables pour le logarithme en base a.

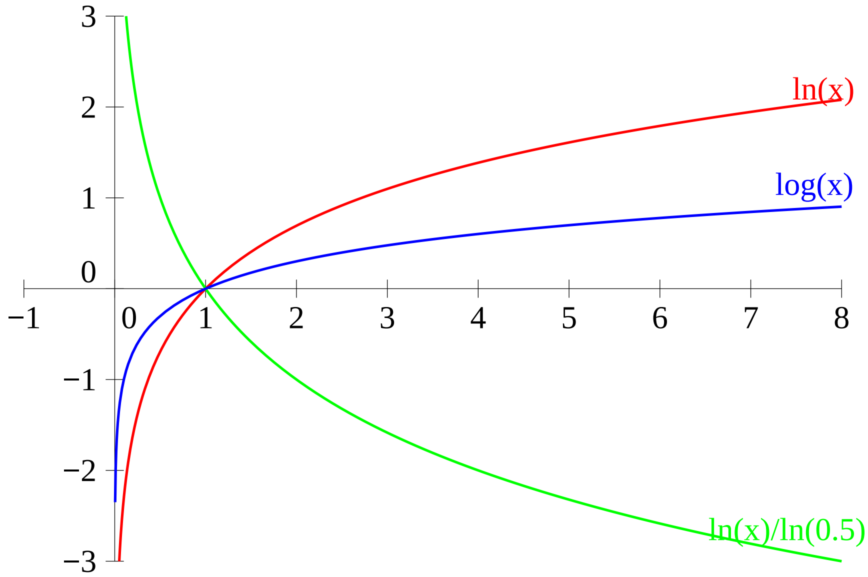
Démonstration.

- La fonction $\log_a$ étant proportionnelle au logarithme népérien, elle est dérivable, de dérivée $\log_a'(x) = \dfrac{1}{x\ln(a)}$. Lorsque $a > 1$, $\ln(a) > 0$, la fonction est donc strictement croissante, et les limites découlent de celles de la fonction ln par simple application des règles usuelles de calculs de limites.

- Cette fois-ci, $\ln(a) < 0$, ce qui explique à la fois le changement de sens de variation, et le changement de signe des limites.
- Il suffit de reprendre chacune des formules pour le ln, et de diviser partout par $\ln(a)$, pour obtenir les équivalents pour le logarithme en base a.

$\square$

Pour finir, quelques exemples de courbes, qui ont la même allure que celle de la fonction ln :



Définition 13. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*} \backslash \{1\}$, la fonction **exponentielle en base** a est définie sur $\mathbb{R}$ comme la réciproque de la fonction $\log_a$. On la note $\exp_a$.

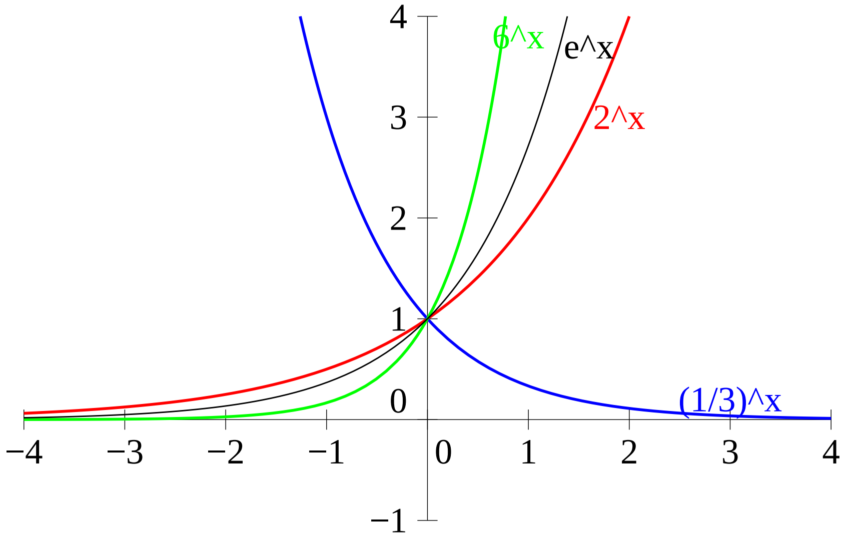
Proposition 10. Principales propriétés des exponentielles :
- On dispose de la formule explicite suivante : $\exp_a(x) = e^{x \ln(a)}$.
- Lorsque $a > 1$, la fonction $\exp_a$ est strictement croissante et admet les mêmes limites que l'exponentielle.
- Lorsque $0 < a < 1$, la fonction $\exp_a$ est strictement décroissante ; $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp_a(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp_a(x) = 0$.
- Toutes les règles de calcul vues sur l'exponentielle restent valables pour l'exponentielle en base a. On notera généralement, similairement à ce qu'on fait pour l'exponentielle de base e, $\exp_a(x) = a^x$.

Démonstration.
- En effet, $\log_a(e^{x \ln(a)}) = \dfrac{\ln(e^{x \ln(a)})}{\ln(a)} = x$, donc $e^{x \ln(a)}$ est bien l'unique antécédent de x par la fonction $\log_a$.
- On peut au choix utiliser le théorème de la bijection comme on l'a fait pour l'exponentielle, ou simplement utiliser la formule explicite vue ci-dessus.
- Cf le point précédent.
- Là encore, on peut reprendre la méthode utilisée dans le cas de l'exponentielle, ou utiliser la formule explicite. Par exemple, $\exp_a(x + y) = e^{(x+y) \ln(a)} = e^{x \ln(a) + y \ln(a)} = e^{x \ln(a)} \times e^{y \ln(a)} = \exp_a(x) \times \exp_a(y)$.

$\square$

Remarque 7. En utilisant la notation introduite en fin de proposition précédente, on peut écrire les règles de calcul sous une forme plus simple, par exemple $a^{x+y} = a^x a^y$. Toutes ces formules correspondent à des propriétés classiques de manipulation des puissances, qui se généralisent ainsi sans difficulté à des exposants et des bases non entiers.

Et pour changer, on conclut avec quelques courbes :



3 Fonctions puissances

3.1 Fonctions puissances entières

Définition 14. Soit x un nombre réel. Les **puissances positives** de x sont définies par récurrence : $x^0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^{n+1} = x^n \times x$. Lorsque $x \neq 0$, on peut également définir des **puissances négatives** comme inverses des puissances positives : $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$. Les fonctions puissances $x \mapsto x^n$ sont donc définies sur $\mathbb{R}$ lorsque $n \geqslant 0$, et sur $\mathbb{R}^*$ lorsque $n < 0$.

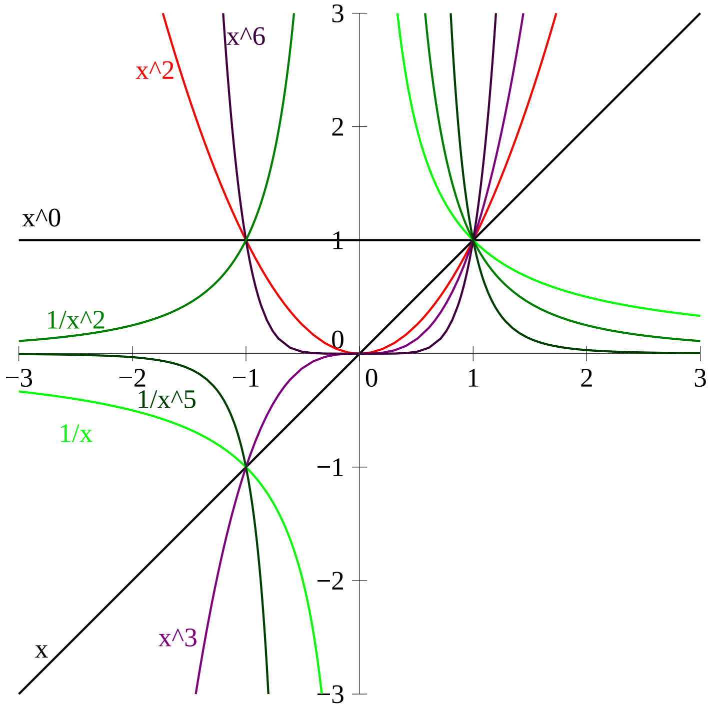
Proposition 11. Principales propriétés des fonctions puissances entières :

- Les fonctions puissances sont continues et dérivables sur leur domaine de définition, de dérivée nx^{n-1} lorsque $n \neq 0$ (la dérivée de la fonction constante x^0 étant nulle).
- Lorsque n est un entier pair strictement positif, la fonction puissance n est paire, décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$. Elle a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Lorsque n est impair positif, la fonction est impaire, croissante sur $\mathbb{R}$, de limites respectives $-\infty$ et $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Lorsque n est pair strictement négatif, la fonction est paire, strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et décroissante sur $]0; +\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^n = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^n = +\infty$.
- Lorsque n est impair négatif, la fonction est impaire, décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^n = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^-} x^n = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n = +\infty$.

Démonstration. Nous nous contenterons de démontrer la formule pour la dérivée, les limites étant « évidentes » à ce stade de l'année (on reviendra sur ces calculs après avoir rigoureusement défini les limites dans un chapitre ultérieur). Prouvons donc la formule quand $n > 0$ par récurrence, ce qui nous donnera une occasion de réviser un peu la théorie de la dérivation. Pour $n = 1$, la fonction $x \mapsto x$ a pour taux d'acroissement au point d'abscisse x l'expression $\tau_x(h) = \dfrac{x + h - x}{h} = 1$. Cette expression ayant évidemment pour limite 1 quand h tend vers 0, la dérivée de la fonction $x \mapsto x$ est constante égale à 1. Supposons désormais la formule vraie pour un certain entier n, et appliquons la formule de défivation d'un produit à la fonction $f : x \mapsto x^{n+1} = x^n \times x$: $f'(x) = nx^{n-1} \times x + x^n \times 1 = nx^n + x^n =$

$(n+1)x^n$, ce qui prouve l'hérédité et achève la récurrence. Pour les puissances négatives, on peut utiliser la dérivée d'un inverse. Si $n > 0$, $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ a pour dérivée $-\dfrac{nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -\dfrac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$. La formule annoncée est donc toujours valable. □

Vous commencez à avoir l'habitude, quelques petites courbes pour illustrer tout cela :

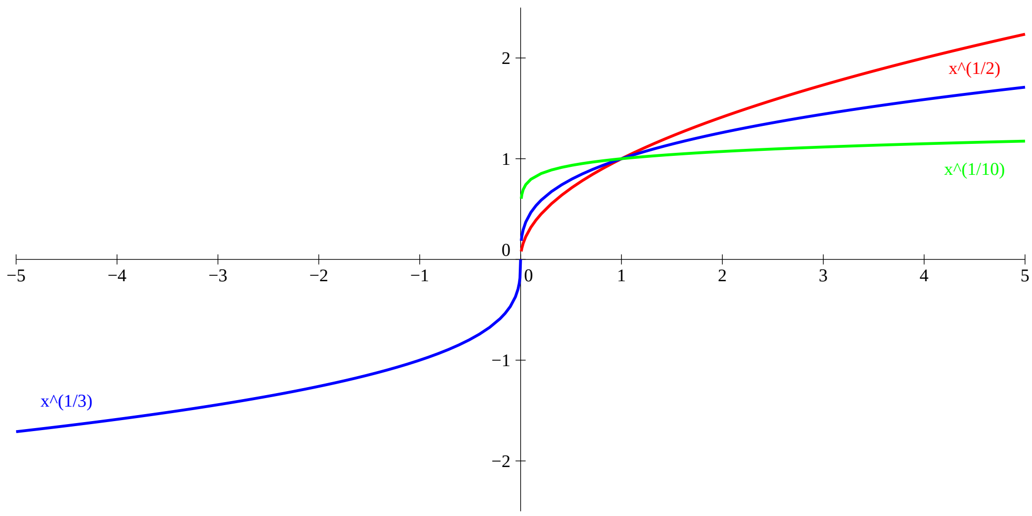


3.2 Racines n-èmes

Définition 15. Soit n un entier pair strictement positif. On définit la fonction **racine n-ème** comme la réciproque de la fonction puissance n sur l'intervalle $[0;+\infty[$. On la note $\sqrt[n]{x}$. Lorsque n est impair strictement positif, on peut définir la fonction racine n-ème sur $\mathbb{R}$ puisque la puissance n est alors bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La notation reste la même.

Remarque 8. Lorsque $n = 2$, comme vous en avez l'habitude, on notera la racine carrée $\sqrt{x}$.

Encore quelques exemples de courbes :



3.3 Puissances quelconques

Définition 16. Soit $a \in \mathbb{R}^*$, la fonction **puissance en base** a est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $x^a = e^{a \ln x}$.

Remarque 9. Cette définition prolonge bien celle donnée pour les puissances entières et les racines n-èmes. Pour les puissances entières par exemple, on a vu que $n \ln x = \ln(x^n)$, donc $e^{n \ln x} = x^n$.

Proposition 12. Principales propriétés des fonctions puissances :

- La fonction $x \mapsto x^a$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée ax^{a-1}.
- Si $a > 0$, la puissance en base a est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^a = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^a = +\infty$.
- Si $a < 0$, la puissance en base a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^a = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^a = 0$.
- Les fonctions puissances en base a et en base $\dfrac{1}{a}$ sont réciproques l'une de l'autre. En particulier, la fonction puissance en base $\dfrac{1}{n}$ coïncide avec racine n-ème.
- Les propriétés algébriques des puissances entières restent valables pour les puissances quelconques : $x^a \times x^b = x^{a+b}$; $(x^a)^b = x^{ab}$; $1^a = 1$.

Démonstration.

- En effet, $e^{a \ln(x)}$ se dérive comme une composée, et a pour dérivée $\dfrac{a}{x} e^{a \ln(x)} = \dfrac{a}{e^{\ln(x)}} e^{a \ln(x)} = ae^{(a-1)\ln(x)} = ax^{a-1}$.
- En effet, la dérivée est alors positive. Les limites se calculent via les règles usuelles de calculs de limites. Par exemple, $\lim\limits_{x \to 0} a \ln(x) = -\infty$, et par composition $\lim\limits_{x \to 0} e^{a \ln(x)} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$.
- Même principe que ci-dessus.
- Vérifions : $e^{a \ln(x)} = y$ est équivalent à $a \ln(x) = \ln(y)$, soit $\ln(x) = \dfrac{1}{a} \ln(y)$ ou encore $x = e^{\frac{1}{a} \ln(y)}$, ce qui prouve le proposition.
- Tout cela se vérifie aisément à l'aide des propriétés du logarithme et de l'exponentielle. Par exemple, $x^a \times x^b = e^{a \ln(x)} \times e^{b \ln(x)} = e^{(a+b)\ln(x)} = x^{a+b}$. De même, $(x^a)^b = e^{b \ln(e^{a \ln(x)})} = e^{ab \ln(x)} = x^{ab}$. Quant au $1^a = 1$, c'est une conséquence directe du fait que $\ln(1) = 0$.

$\square$

Remarque 10. La fonction puissance en base a est prolongeable par continuité en 0 en posant $0^a = 0$ lorsque $a > 0$. Si $a > 1$, sa dérivée est également prolongeable par 0 en 0 (cf les résultats de croissance comparée), ce qui prouve que la courbe représentative de ces fonctions admet en 0 une tangente verticale (on reviendra sur ce genre de calculs dans un chapitre ultérieur sur la dérivation.

Vous attendiez les courbes ? Il n'y en aura pas, les fonctions puissances quelconques ayant des allures très similaires à celles des puissances entières et des racines n-èmes vues plus haut.

4 Limites classiques

Proposition 13. Les deux limites suivantes en 0 peuvent permettre de lever des indéterminations complexes : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$; et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Démonstration. Ce sont des conséquences des formules pour les dérivées des fonctions ln et exp. Le taux d'accroissement de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 vaut $\tau_0(h) = \dfrac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \dfrac{\ln(1+h)}{h}$. La fonction f étant dérivable, de dérivée $\dfrac{1}{x+1}$, l'expression converge donc quand h tend vers 0 vers $f'(0) = 1$. De même, en considérant simplement le taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0, la deuxième limite est égale à $e^0 = 1$. $\square$

Proposition 14. Croissances comparées :

- $\forall a > 1,\ \forall b > 0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^b} = +\infty$
- $\forall b > 0,\ \forall c > 0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^b}{(\ln(x))^c} = +\infty$
- $\forall a > 1,\ \forall c > 0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{(\ln(x))^c} = +\infty$

Autrement dit, on peut répartir de la façon suivante les fonctions usuelles en $+\infty$, les croissances les plus rapides se situant à droite :
$(\ln x)^{\frac{1}{2}}$ $\ln x$ $(\ln x)^2$ $(\ln x)^{47}$ $\sqrt{x}$ x x^2 $x^{2436525}$ $1,2^x$ 2^x e^x 12^x

Démonstration. Toutes ces propriétés se ramènent à la plus simple des propriétés de croissance comparée, à savoir que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, ce que nous ne pouvons pas prouver aisément avec notre définition du logarithme.

- Constatons par exemple que $\dfrac{a^x}{x^b} = \dfrac{e^{x\ln(a)}}{e^{b\ln(x)}} = e^{x\ln(a) - b\ln(x)} = e^{x(\ln(a) - b\frac{\ln(x)}{x})}$. En admettant la limite précédente, l'exposant dans l'exponentielle a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (avec la condition $a > 1$), donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^b} = +\infty$.
- La deuxième est exactement du même type en posant $X = \ln(x)$, puisqu'on a alors $\dfrac{x^b}{(\ln(x))^c} = \dfrac{e^{bX}}{e^{c\ln(X)}} = e^{X(b - c\frac{\ln(X)}{X})}$.
- La dernière découle des deux premières par un simple produit de limites.

$\square$

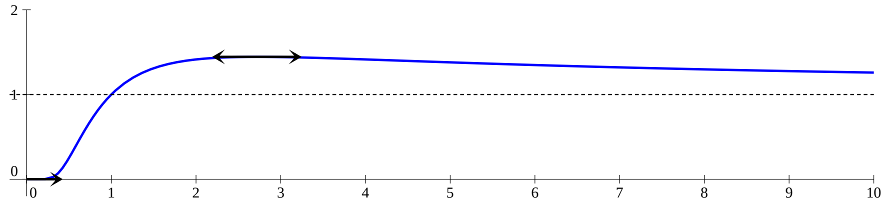
Remarque 11. On peut déduire de ces résultats les autres propriétés suivantes :

- $\forall a > 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x \to -\infty} a^x \times x^n = 0$
- $\forall b > 0,\ \forall c > 0,\ \lim\limits_{x \to 0^+} x^b (\ln x)^c = 0$.

Exemple : Étudions en détail la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$.

- Le premier réflexe à avoir est d'écrire f sous la forme $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$. Cela permet notamment de justifier de façon immédiate que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+*}$.
- On peut ensuite calculer la dérivée : $f'(x) = \left(-\dfrac{1}{x^2}\ln(x) + \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}\ln(x)} = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2} e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$. L'exponentielle étant toujours positive, et x^2 également, le signe de f' est celui de $1 - \ln(x)$, qui s'annule lorsque $\ln(x) = 1$, soit $x = e$. La fonction f est croissante sur $]0; e]$ et décroissante sur $[e; +\infty[$. Elle admet un maximum pour $x = e$, de valeur $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$ (ça ne se simplifie pas).
- Déterminons désormais les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x}\ln(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée ici), $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$. De l'autre côté, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}\ln(x) = 0$ (par croissance comparée), on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e^0 = 1$. Il y a en particulier une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.
- Si on est courageux, on peut tenter de déterminer la présence d'une éventuelle tangente en 0 (où la fonction est prolongeable par continuité), en cherchant si f' y admet une limite. Le calcul est loin d'être évident, mais on peut faire une factorisation ingénieuse : $f'(x) = \dfrac{\ln(x)^2}{x^2}\left(\dfrac{1}{\ln(x)^2} - \dfrac{1}{\ln(x)}\right) e^{\frac{\ln(x)}{x}}$. En posant $X = \dfrac{\ln(x)}{x}$, X a pour limite $-\infty$ quand x tend vers 0, donc le produit $X^2 e^X$ tend vers 0 (c'est de la croissance comparée). La parenthèse restante avec les inverses de ln tendant elle aussi manifestement vers 0, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0$, ce qui prouve l'existence d'une tanngente horizontale à la courbe en 0.

- On achève naturellement par une jolie courbe, en indiquant les tangentes connues :



5 Compléments

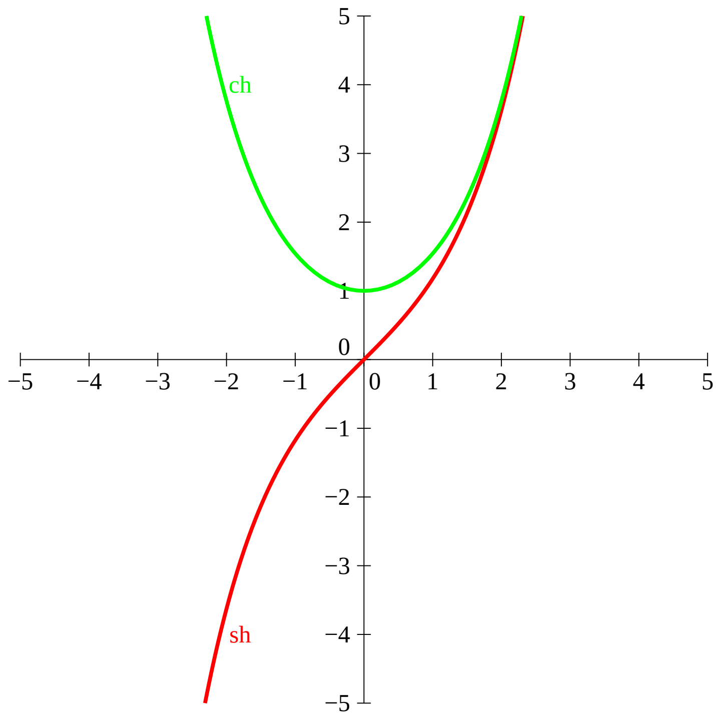
5.1 Fonctions hyperboliques

Les fonctions hyperboliques sont de la même famille que les fonctions trigonométriques dans le sens où elles ont une interprétation géométrique très similaire en remplaçant le cercle trigonométrique par une hyperbole, ce qui explique le nom de ces fonctions. Mais ces fonctions peuvent également s'exprimer très simplement à partir d'une autre fonction que vous connaissez bien, l'exponentielle.

Définition 17. Les fonctions **cosinus et sinus hyperbolique** sont définies sur $\mathbb{R}$ par les équations suivantes : $\text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\text{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Remarque 12. Nous verrons quand nous reverrons les propriétés classiques des nombres complexes que les formules d'Euler donnent une forme extrêmement similaires aux fonctions trigonométriques. Par ailleurs, les fonctions hyperboliques interviennent naturellement dans le cadre de certains problèmes physiques simples : la courbe formée par un cable fixé en deux points et soumis à la force gravitationnelle (cable téléphonique mal tendu entre deux poteaux, par exemple) est une courbe de cosinus hyperbolique.

Proposition 15. La fonction ch est paire, la fonction sh impaire. Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\text{ch}' = \text{sh}$; $\text{sh}' = \text{ch}$. Le cosinus hyperbolique est décroissant sur $\mathbb{R}_-$ et croissant sur $\mathbb{R}_+$, alors que le sinus hyperbolique est croissant sur $\mathbb{R}$. Les courbes sont les suivantes :



Démonstration. Tout ceci est assez facile : $\text{ch}(-x) = \dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \text{ch}\, x$; $\text{sh}(-x) = \dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\,\text{sh}\, x$; $\text{ch}'(x) = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \text{sh}\, x$, et de même pour sh'. Quand aux signes, ch est positive comme somme de deux exponentielles, sh est donc croissante et s'annule en 0, elle est donc négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$. □

Proposition 16. Pour tout réel x, on a $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.

Démonstration. $\text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x) = \dfrac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2) = 1$. □

Remarque 13. Il existe beaucoup d'autres formules de trigonométrie hyperbolique, ressemblant souvent aux formules de trigonométrie classiques, nous en verrons quelques exemples en exercice.

5.2 Fonction partie entière

Définition 18. La **partie entière** d'un réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x. On la note $\text{Ent}(x)$, $E(x)$, ou encore $\lceil x \rceil$.

Exemples : $\text{Ent}(2,65743565678) = 2$; $\text{Ent}(5) = 5$; $\text{Ent}(-3,4) = -4$. Autrement dit, la partie entière de x est le seul entier vérifiant $\text{Ent}(x) \leqslant x \leqslant \text{Ent}(x) + 1$.

Proposition 17. La fonction partie entière est constante par morceaux. Elle est continue sur tous les intervalles de la forme $]n; n+1[$, où $n \in \mathbb{Z}$.

Voici la courbe de la fonction partie entière :