

# Feuille d'exercices n°3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

23 septembre 2013

## Exercice 1 (\*)

En constatant que  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ , on peut simplement appliquer les formules d'addition pour obtenir  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ . On obtient de même  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ , puis en effectuant le quotient  $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$ .

Pour  $\frac{\pi}{24}$ , pas vraiment d'autre choix que de passer par les formules de duplication :  $2 \times \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$ , donc  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) - 1$ . On en déduit que  $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 1\right)} = \sqrt{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + 4}{8}}$ .

En exploitant ensuite la relation  $\cos^2 + \sin^2 = 1$ , on trouve  $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}}$ , puis enfin  $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}}}$ , ce qu'on peut essayer de simplifier si on a du temps à perdre (mais on n'obtient rien de très simple).

## Exercice 2 (\*\* à \*\*\*)

1. Cela se produit si  $2x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ , soit  $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ , ce qu'on note également  $x \equiv \frac{\pi}{8} \left[ \frac{\pi}{2} \right]$ .
2.  $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right) \Leftrightarrow -x - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{x}{4}[2\pi]$  ou  $-x - \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{x}{4}[2\pi] \Leftrightarrow \frac{5x}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$  ou  $\frac{3x}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ , donc  $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{5} + k\frac{8\pi}{5}, -\frac{\pi}{3} + k\frac{3\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .
3. Il suffit d'utiliser la formule de transformation produit/somme :  $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\cos(2x) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$  ou  $2x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ , donc  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .
4. Beaucoup moins compliqué que ça n'en a l'air, il suffit d'y croire :

$$\begin{aligned}
& \sin(3x) \cos^3(x) + \sin^3(x) \cos(3x) = \frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow & (3 \sin(x) - 4 \sin^3(x)) \cos^3(x) + \sin^3(x)(4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)) = \frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow & \sin(x) \cos^3(x) - \sin^3(x) \cos(x) = \frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow & \sin(x) \cos(x)(\cos^2(x) - \sin^2(x)) = \frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{2} \sin(2x) \cos(2x) = \frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow & \sin(4x) = 1 \\
\text{On a donc } & 4x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ et } \mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.
\end{aligned}$$

5. L'équation ne peut avoir de sens que si  $x \in [-1; 1]$  et  $2x \in [-1; 1]$ , donc  $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ . On peut ensuite prendre le sin de chaque côté de l'équation. Comme  $\arccos(x) \in [0; \pi]$ ,  $\sin(\arccos(x)) > 0$ , et  $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1 - x^2}$ . Quant au sinus de  $\arcsin(2x)$ , il vaut évidemment  $2x$ , ce qui donne la condition nécessaire  $2x = \sqrt{1 - x^2}$ . Les solutions de l'équation sont donc forcément positives et vérifient, en élevant au carré l'égalité précédente,  $4x^2 = 1 - x^2$ , soit  $x^2 = \frac{1}{5}$ , donc  $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$  (la solution négative ayant déjà été exclue). Cette valeur est bien inférieure à  $\frac{1}{2}$ , donc  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\sqrt{5}}{5} \right\}$ .

### Exercice 3 (\*\*)

Il suffit d'appliquer une deuxième fois la formule de duplication des tangentes :  $\tan(4x) = \tan(2x + 2x) = \frac{2 \tan(2x)}{1 - \tan^2(2x)} = \frac{\frac{4 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}}{1 - \frac{4 \tan^2(x)}{(1 - \tan^2(x))^2}} = \frac{4 \tan(x)(1 - \tan^2(x))}{1 - 6 \tan^2(x) + \tan^4(x)}$ .

Appliquons la formule à  $x = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$  (qui a évidemment pour tangente  $\frac{1}{5}$ ) pour obtenir  $\tan(4x) = \frac{\frac{4}{5} \times (1 - \frac{1}{25})}{1 - \frac{6}{25} + \frac{1}{625}} = \frac{20 \times 24}{625 - 150 + 1} = \frac{480}{476} = \frac{120}{119}$ . Calculons maintenant  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{1}{239}\right)\right) = \frac{1 + \frac{1}{239}}{1 - \frac{1}{239}} = \frac{240}{238} = \frac{120}{119}$ . Ca vous rappelle quelque chose? Les deux angles  $4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$  et  $\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$  ont la même tangente, et ils sont tous les deux positifs et plus petits que  $\frac{\pi}{2}$  (pour le deuxième c'est évident, pour le premier, il faut vérifier que  $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) > \frac{1}{5}$ ), ce qui permet de conclure à l'égalité des deux angles, ce qui prouve la formule de Machin. Pour être complets, calculons donc les lignes trigonométriques de  $\frac{\pi}{8}$  en utilisant que  $2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ . On en déduit par exemple que  $2 \cos^2\left(\frac{\pi}{8} - 1\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , donc  $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2} + 2}{4}$ , donc  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2}$ . On aura ensuite  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ . On obtient enfin  $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6 - 4\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$  (qui pour les plus curieux peut se simplifier en  $\sqrt{2} - 1$ ). En tout cas, ce nombre a pour carré  $3 - 2\sqrt{2}$ , dont on veut prouver qu'il est supérieur à  $\frac{1}{25}$ , ce qui revient à dire que  $74 - 50\sqrt{2} > 0$ , soit  $\sqrt{2} < \frac{37}{25}$ . En élevant au carré, on a bien  $2 < \frac{1369}{625}$ , donc tout va bien (ouf!).

La deuxième formule est plus simple :  $\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$ .

Comme on sait par ailleurs que  $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ , il est facile de voir que  $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{2}$ , ce qui achève la démonstration de l'égalité.

### Exercice 4 (\*\*)

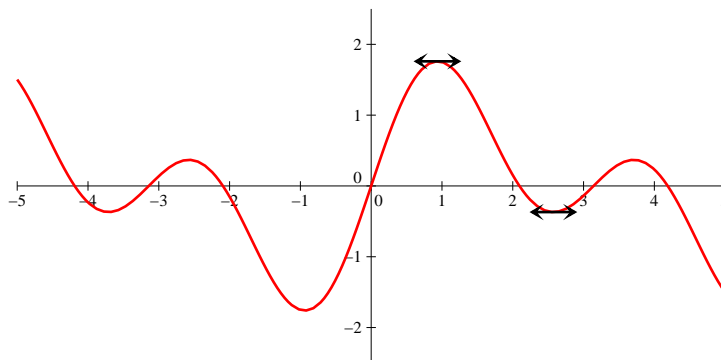
- On sait bien sûr que  $\arccos(\cos(x)) = x$  seulement si  $x \in [0; \pi]$ . Mais on sait aussi que  $\cos\left(\frac{507\pi}{3}\right) = \cos(169\pi) = -1$ , donc  $\arccos\left(\cos\left(\frac{507\pi}{3}\right)\right) = \pi$ . Bon, c'eût été un peu plus intéressant en prenant autre chose qu'un multiple de  $\pi$ , mais le principe reste le même.
- Cette expression n'est bien sûr définie que si  $x \in [-1; 1]$ , et puisque  $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , son cosinus est nécessairement positif. On peut alors écrire  $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}$ .
- On sait que  $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ , donc  $\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}(\cos(x) + 1)$ . Or,  $\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$ , donc  $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ , et  $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan(x)\right) = \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} + \frac{1}{2}$ .
- Ici, rien d'évident ne sautant aux yeux, on peut tenter une autre tactique consistant à dériver l'expression. Posons donc  $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$ , alors  $f'(x) = \frac{u'(x)}{1 + u(x)^2}$ , avec  $u(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ . On a donc  $1 + u(x)^2 = 1 + \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{1+x}$ , et  $u'(x) = \frac{-\frac{1-x-1+x}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = -\frac{1}{1+x}\sqrt{\frac{1}{(1+x)(1-x)}}$ . Finalement  $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ . On reconnaît une dérivée usuelle, et on en déduit que  $f(x) = \frac{1}{2}\arccos(x) + k$ , où  $k$  est une constante réelle. Calculons  $f(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ . Or,  $\frac{1}{2}\arccos(0) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ . La constante  $k$  est donc nulle, et  $\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \frac{1}{2}\arccos(x)$  (ce qu'on peut obtenir directement par des arguments trigonométriques).

### Exercice 5 (\*\*\*)

- La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique et impaire. On va donc restreindre son étude à l'intervalle  $[0; \pi]$ . Elle est dérivable, de dérivée  $f'(x) = \cos(x) + 2\cos(2x) = \cos(x) + 2(2\cos^2(x) - 1) = 4\cos^2(x) + \cos(x) - 2$ . En posant  $X = \cos(x)$ , on se ramène à l'étude du signe du trinôme  $4X^2 + X - 2$ , qui a pour discriminant  $\Delta = 1 + 32 = 33$ , et admet donc pour racines  $X_1 = \frac{-1 + \sqrt{33}}{8}$  et  $X_2 = \frac{-1 - \sqrt{33}}{8}$ . Ces valeurs n'étant certainement pas des cosinus d'angles remarquables, on ne peut que les exprimer à l'aide de la fonction arccos (les deux valeurs sont comprises entre  $-1$  et  $1$ ). Comme arccos est une fonction décroissante,  $\arccos(X_1) < \arccos(X_2)$ , et le tableau de variations ressemble à ceci :

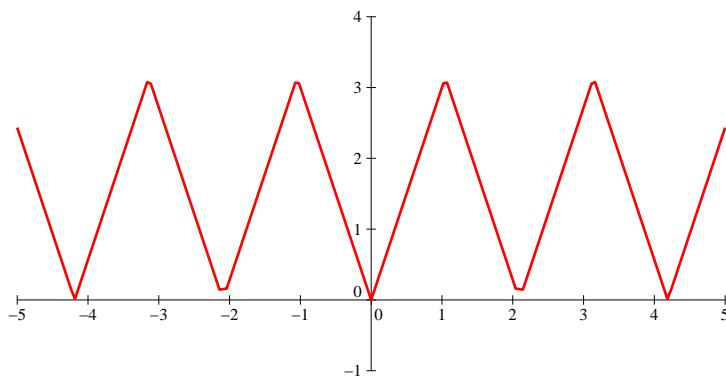
$x$	0	$x_1 = \arccos(X_1)$	$x_2 = \arccos(X_2)$	$\pi$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f$	0	$f(x_1)$	$f(x_2)$	0	

On peut, si on est vraiment très motivé, chercher à calculer les valeurs du minimum et du maximum, mais on va tomber sur des valeurs affreuses. Par exemple,  $f(x_1) = \sin(\arccos(X_1)) + \sin(2 \arccos(X_1)) = \sin(\arccos(X_1)) + 2 \sin(\arccos(X_1)) \cos(\arccos(X_1))$  en appliquant la formule de duplication. Or,  $\sin(\arccos(X_1)) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(X_1))}$  (les sinus sont positifs puisqu'on est dans  $[0; \pi]$ ), donc  $\sin(\arccos(X_1)) = \sqrt{1 - X_1^2}$ , avec  $X_1^2 = \frac{1 + 33 - 2\sqrt{33}}{64} = \frac{34 - 2\sqrt{33}}{64}$ , soit  $\sin(\arccos(X_1)) = \sqrt{\frac{30 + 2\sqrt{33}}{64}} = \frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{8}$ . On obtient alors  $f(x_1) = \frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{8} + 2 \frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{8} \frac{\sqrt{33} - 1}{8} = \frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{8} + \frac{(\sqrt{33} - 1)\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{32} = \frac{(\sqrt{33} + 3)\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{32}$ . C'est très laid et fort peu exploitable, on se dispensera donc de tenter un calcul du minimum.



- La fonction  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , car  $\cos(3x)$  étant toujours compris entre  $-1$  et  $1$ , on tombe toujours dans l'intervalle de définition de la fonction arccos. La fonction est de plus paire (puisque  $\cos$  l'est), et  $\frac{2\pi}{3}$  périodique (comme  $x \mapsto \cos(3x)$ ). On peut donc restreindre l'intervalle d'étude à  $[0; \frac{\pi}{3}]$ . Or, sur cet intervalle, on constate que  $3x \in [0; \pi]$ , donc  $\arccos(\cos(3x)) = 3x$ . La courbe représentative de  $g$  sur cet intervalle est donc un segment de droite, et le reste s'en déduit par la symétrie et la périodicité.

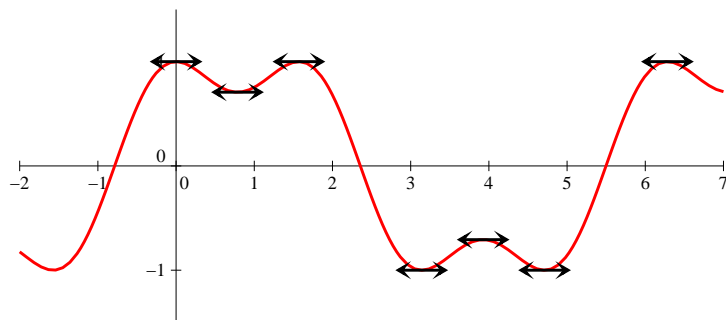
Les plus courageux auront calculé la dérivée :  $g'(x) = -3 \sin(3x) \times \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(3x)}} = \frac{3 \sin(3x)}{\sqrt{\sin^2(3x)}} = 3 \frac{\sin(3x)}{|\sin(3x)|}$ , qui vaut  $3$  ou  $-3$  selon le signe de  $\sin(3x)$ . On retrouve alors l'allure de la courbe.



- La fonction  $h$  est définie sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique, mais ni paire ni impaire. On va donc restreindre son étude à l'intervalle  $[0; 2\pi]$ . On peut la dériver :  $h'(x) = -3 \sin(x) \cos^2(x) + 3 \cos(x) \sin^2(x) = 3 \sin(x) \cos(x)(\sin(x) - \cos(x))$ . Le dernier facteur s'annule en  $\frac{\pi}{4}$  et en  $\frac{5\pi}{4}$ , ce qui permet d'établir le tableau de variations suivant :

$x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\cos(x)$		+	0	-		0	+
$\sin(x)$	0	+		+	0	-	0
$\sin(x) - \cos(x)$		-	0	+		+	-
$h'(x)$	0	-	0	+	0	-	0
$h$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	1

Calcul des valeurs intéressantes :  $f(0) = 1^3 + 0^3 = 1$ ;  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{2\sqrt{2}}{8} + \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; les derniers calculs sont extrêmement similaires. On peut enfin tracer une fort belle courbe :

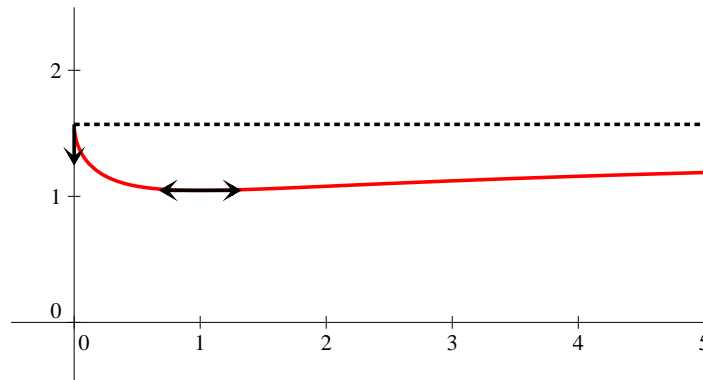


- La fonction  $i$  ne peut être définie que si  $x \geq 0$  (à cause de la racine carrée) et si  $\frac{\sqrt{x}}{1+x} \in [-1; 1]$  à cause du arccos. Puisqu'on a déjà supposé  $x \geq 0$ , cela revient à dire qu'on doit avoir  $\sqrt{x} \leq 1+x$ , soit en élevant au carré  $x \leq 1 + 2x + x^2$ , ce qui est toujours le cas. On a donc  $\mathcal{D}_i = \mathbb{R}^+$ . On peut dériver la fonction  $i$ , ce qui donne  $i'(x) = \frac{\frac{1+x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(1+x)^2} \times \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{x}{(1+x)^2}}} = -\frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2} \times \frac{1+x}{\sqrt{(1+x)^2 - x}} = \frac{x-1}{2\sqrt{x}(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$ . On peut constater en passant que la fonction  $i$  n'est pas dérivable en 0 (il y aura une tangente verticale puisque la dérivée y a une limite infinie), et la dérivée, bien qu'assez laide, est simplement du signe de  $x-1$ . La fonction admet

donc un minimum en 1, de valeur  $i(1) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ . Par ailleurs,  $f(0) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ , et comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = 0$ , on aura également  $\lim_{x \rightarrow +\infty} i(x) = \frac{\pi}{2}$ . On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

$x$	0	1	$+\infty$
$i$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Et tracer une dernière et magnifique courbe :



## Exercice 6 (\*\*)

1. Reprenez la construction donnée dans le cours, à l'aide du cercle trigonométrique, du sinus et de la tangente. On peut tout interpréter en termes de longueur :  $\sin(h)$  (remplacez le  $x$  du cours par un  $h$ ) est la hauteur du triangle intérieur au cercle, dont les sommets sont  $O$ ,  $M$  et le point  $I$  de coordonnées  $(1, 0)$ . La valeur de  $\tan(h)$  est la hauteur du triangle extérieur au cercle et tangent extérieurement au point  $I$ . Quant à  $x$ , c'est par définition la longueur de l'arc de cercle reliant le point  $I$  à  $M$ . Ainsi, l'aire du petit triangle vaut  $\frac{1}{2} \sin(h)$ , celle du triangle extérieur vaut  $\frac{1}{2} \tan(h)$ , et la portion de disque contenue entre les deux a pour aire  $\pi \times \frac{h}{2\pi} = \frac{h}{2}$ . En multipliant tout par 2, on obtient  $\sin(h) \leq h \leq \tan(h)$ .
2. L'inégalité de droite a déjà été prouvée. Celle de gauche s'obtient en partant de  $h \leq \tan(h)$  et en multipliant de chaque côté par  $\cos(h)$ . En divisant tout cela par  $h$ , on a alors  $\cos(h) \leq \frac{\sin(h)}{h} \leq 1$ . Comme  $\cos(0) = 1$ ,  $\frac{\sin(h)}{h}$  est encadré par deux expressions tendant vers 1 en 0, donc  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$ .
3. Puisque  $\sin(0) = 0$ , on en déduit facilement que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2(h)}{h} = 0$ . Or,  $\frac{\sin^2(h)}{h} = \frac{1 - \cos^2(h)}{h} = (1 + \cos(h)) \frac{1 - \cos(h)}{h}$ . Le premier terme ayant pour limite 2 en 0, le deuxième doit nécessairement avoir une limite nulle pour que le produit tende vers 0.
4. Revenons à la définition de la dérivée : le taux d'accroissement du cos en  $x$  vaut  $\tau_x(h) = \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$ . En utilisant les formules d'addition, on trouve  $\tau_x(h) = \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} = \cos(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \frac{\sin(h)}{h}$ . Le premier quotient tend vers 0, le deuxième vers 1, donc  $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_x(h) = -\sin(x)$ , ce qui donne bien la dérivée

que vous connaissez par coeur pour le cosinus.

5. Même principe, cette fois-ci  $\tau_x(h) = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{\cos(x)\sin(h) + \sin(x)\cos(h) - \sin(x)}{h} = \cos(x)\frac{\sin(h)}{h} + \sin(x)\frac{1 - \cos(h)}{h}$ . Les mêmes limites que tout à l'heure permettent de conclure.

## Exercice 7 (\*\*)

- Il faut bien évidemment que  $x \in [-1, 1]$  pour que  $\arcsin(x)$  soit défini. De plus, on a la condition  $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$  (la fonction arctan étant définie sur  $\mathbb{R}$ , ce sera la seule condition supplémentaire), ce qui est le cas si  $x \in [-1, 1[$  (un petit tableau de signes si besoin). Finalement,  $\mathcal{D}_f = [-1, 1[$ .
- Pour dériver, procédons par étapes. En posant  $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$ , on obtient d'abord  $g'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$ . On compose ensuite par la racine carrée pour obtenir  $\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} = \frac{1}{(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}$ . Il ne reste plus qu'à ajouter l'arctangente pour obtenir la deuxième moitié de la dérivée de  $f$  :  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}} \times \frac{1}{1+\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}} \times \frac{1-x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}} = 0$ . La fonction  $f$  est donc constante. Comme  $f(0) = \arcsin(0) - 2 \arctan(1) = -\frac{\pi}{2}$ , on en déduit que,  $\forall x \in [-1, 1[$ ,  $f(x) = -\frac{\pi}{2}$ .
- Posons donc  $x = \cos(\theta)$  (ce qui est certainement faisable puisque  $x \in [-1, 1[$ ). On peut alors écrire  $\arcsin(x) = \arcsin(\cos(\theta)) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos(\theta)) = \frac{\pi}{2} - \theta$  (on peut toujours choisir  $\theta \in [0, \pi]$ ). Par ailleurs,  $\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\cos(\theta)}{1-\cos(\theta)} = \frac{(1+\cos(\theta))^2}{1-\cos^2(\theta)} = \frac{(1+\cos(\theta))^2}{\sin^2(\theta)}$ , donc  $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$  (sur  $[0, \pi]$ , le sinus est nécessairement positif). Avec un bon feeling, ou plutôt en regardant bien ce qu'on veut obtenir à la fin, on peut alors penser à tout exprimer en fonction de l'angle  $\frac{\theta}{2}$  : les formules de duplication assurent que  $\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$ , et  $\sin(\theta) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , on en déduit que  $\frac{1+\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ . En utilisant l'une des nombreuses formules du cours,  $\frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$ , ce qui permet, en ajoutant l'arctangente, de simplifier  $f(x)$  sous la forme  $f(x) = \frac{\pi}{2} - \theta - 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$ . On retrouve le même résultat qu'à la question précédente.

## Exercice 8 (\*\*\*)

- La fonction  $\cos$  étant définie sur  $\mathbb{R}$ , le domaine de définition de  $T_n$  est le même que celui de la fonction  $\arccos$ , c'est-à-dire le segment  $[-1, 1]$ .
- Calculons :  $T_n(1) = \cos(n \arccos(1)) = \cos(0) = 1$  ;  $T_n(0) = \cos(n \arccos(0)) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$  (qui vaut 0 si  $n$  est impair, 1 si  $n$  est multiple de 4 et  $-1$  si  $n$  est pair mais pas multiple de 4) ; et  $T_n(-1) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ .
- Si  $x \in [0, \pi]$ , on peut simplifier  $\arccos(\cos(x))$  pour trouver  $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ , donc  $g(x) = 0$ . De plus,  $g$  est une fonction paire, car  $\cos$  est paire, elle s'annule donc aussi sur  $[-\pi, 0]$ . Enfin,

$g$  est  $2\pi$ -périodique tout comme cosinus, donc, étant nulle sur une période, elle est toujours nulle. Cela prouve bien que  $\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ .

4. C'est du simple calcul :  $T_0(x) = \cos(0) = 1$  (polynôme constant) ;  $T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x$  (dans ce sens-là, ça marche toujours, du moins bien évidemment pour les valeurs de  $x$  pour lesquelles arccos est définie) ;  $T_2(x) = \cos(2 \arccos(x)) = 2 \cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1$  en utilisant les formules de duplication ; et  $T_3(x) = 4x^3 - 3x$  de même, en utilisant cette fois la formule de triplcation du cosinus.
5. (a) Le plus simple est de partir de la formule de transformation produit-somme appliquée avec  $b = (n+1)a$ , ce qui donne  $\cos(a) \cos((n+1)a) = \frac{1}{2}(\cos(a+(n+1)a) + \cos((n+1)a-a)) = \frac{1}{2}(\cos((n+2)a) - \cos(na))$ . La formule demandée en découle immédiatement.
- (b) On applique tout simplement la formule précédente en choisissant  $a = \arccos(x)$  (et on simplifie bien sûr le  $\cos(\arccos(x))$  en  $x$ ).
- (c) Encore du calcul bête :  $T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$  ; puis  $T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$  ; et enfin  $T_5(x) = 2xT_4(x) - T_3(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$ .
6. Il faut simplement chercher les valeurs de  $x$  pour lesquelles  $n \arccos(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ , ce qui revient bien à dire que  $x = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ . La seule chose à comprendre, c'est qu'on peut se restreindre aux valeurs de  $k$  comprises entre 0 et  $n-1$ , mais pour les autres valeurs de  $k$ , on va tout simplement retomber sur les mêmes valeurs du cosinus ! Par exemple  $\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2n}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2n}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{2n}\right) = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)$ . De toute façon, les valeurs de  $x_k$ , pour  $k$  compris entre 0 et  $n-1$ , sont toutes distinctes (ce sont des cosinus d'angles distincts compris entre 0 et  $\pi$ ), et  $T_n$ , qui est un polynôme de degré  $n$ , ne peut pas avoir plus de  $n$  racines distinctes.