Feuille d'exercices n°3 : Trigonométrie

PTSI B Lycée Eiffel

23 septembre 2013

Exercice 1 (*)

À l'aide des formules d'addition et de duplication, déterminer les valeurs des lignes trigonométriques des angles $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{24}$.

Exercice 2 (** à ***)

Résoudre les équations suivantes :

1. $\tan(2x) = 1$
2. $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$
3. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
4. $\sin(3x)\cos^3(x) + \sin^3(x)\cos(3x) = \frac{3}{4}$
5. $\arcsin(x) = \arccos(2x)$

Exercice 3 (**)

Exprimer, pour un réel x pour lequel cela a un sens, $\tan(4x)$ en fonction de $\tan(x)$. En déduire que $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$ (cette formule, connue sous le nom de formule de Machin, permit au mathématicien du même nom de déterminer les 100 premières décimales du nombre π au début du 18ème siècle).

Montrer par le même type de méthode que $\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$.

Exercice 4 (**)

Simplifier les expressions suivantes :

- $\arccos\left(\cos\left(\frac{507\pi}{3}\right)\right)$
- $\cos(\arcsin(x))$
- $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan(x)\right)$
- $\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

Exercice 5 (***)

Étudier et tracer les courbes des fonctions suivantes :

- $f(x) = \sin(x) + \sin(2x)$
- $g(x) = \arccos(\cos(3x))$
- $h(x) = \cos^3(x) + \sin^3(x)$
- $i(x) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$

Exercice 6 (**)

1. À l'aide de considérations géométriques, montrer que, $\forall h \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin(h) \leqslant h \leqslant \tan(h)$.
2. En déduire que, sous les mêmes hypothèses, $h\cos(h) \leqslant \sin(h) \leqslant h$, puis calculer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(h)}{h}$.
3. En déduire les limites quand h tend vers 0 de $\dfrac{\sin^2(h)}{h}$, puis de $\dfrac{1-\cos(h)}{h}$.
4. Retrouver à partir de ce dernier résultat la formule donnant la dérivée de la fonction cos.
5. Démontrer de même que la dérivée de la fonction sin est la fonction cos.

Exercice 7 (**)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \arcsin(x) - 2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Exprimer f plus simplement en vous aidant d'un calcul de dérivée.
3. Retrouver ce même résultat à partir de manipulation trigonométriques en faisant intervenir une variable θ telle que $x = \cos(\theta)$.

Exercice 8 (***)

Pour tout entier naturel n, on pose $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

1. Préciser le domaine de définition de la fonction T_n.
2. Calculer $T_n(1)$, $T_n(0)$ et $T_n(-1)$.
3. Posons $g(x) = T_n(\cos(x)) - \cos(nx)$ pour tout x réel. Que vaut $g(x)$ pour $x \in [0, \pi]$? Quelle est la parité de g ? Sa périodicité ? En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.
4. Montrer que $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$ et $T_3(x)$ sont des polynômes en x, que l'on précisera.
5. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\cos((n+2)a) = 2\cos((n+1)a)\cos(a) - \cos(na)$.
   (b) En déduire que pour $x \in [-1, 1]$, $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$.
   (c) Retrouver ainsi l'expression de $T_3(x)$, puis calculer $T_4(x)$ et $T_5(x)$.
6. Démontrer que les solutions de l'équation $T_n(x) = 0$ sont les réels $x_k = \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$, avec k entre 0 et $n-1$.