# Feuille d'exercices n°8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

10 janvier 2014

## Exercice 1 (**)

- Soit donc un réel $M > 0$ (si $M \leqslant 0$, il suffit de prendre $n_0 = 2$ pour que la définition de la limite soit vérifiée). On aura $n^2 - 2n > M$ dès que (ce n'est pas une équivalence) $n - 2 > \sqrt{M}$ (puisqu'alors $n > \sqrt{M}$, et $n^2 = n(n-2) > M$). Il suffit donc de prendre $n_0 = Ent(2+\sqrt{M})+1$ pour satisfaire la définition de la limite infinie.
- Soit $\varepsilon > 0$, $\dfrac{1}{2n+3} < \varepsilon$ si $2n+3 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, soit $n > \dfrac{1}{2\varepsilon} - \dfrac{3}{2}$, il suffit donc de prendre un $n_0$ strictement supérieur à cette quantité (je vous épargne le coup de la partie entière augmentée d'un) pour satisfaire à la définition de la limite nulle.
- Soit $\varepsilon > 0$, on calcule $\dfrac{2n-1}{n+1} - 2 = \dfrac{-3}{n+1}$. On aura donc $\left|\dfrac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$ si $\dfrac{3}{n+1} < \varepsilon$, soit $n > \dfrac{3}{\varepsilon} - 1$, ce qui donne facilement une valeur de $n_0$ convenable.
- Soit $M > 0$ (si $M \leqslant 0$, encore une fois, ce n'est pas trop dur de rendre $\sqrt{n+3}$ plus grand que $M$). On aura $\sqrt{n+3} > M$ dès que $n > M^2 - 3$. Il suffit donc de prendre $n_0 = Ent(M^2-3)+1$.

## Exercice 2 (**)

1. Vrai, elle est minorée par le plus petit des termes précédant le rang à partir duquel elle est croissante (c'est-à-dire que si, par exemple, $(u_n)$ est croissante à partir du rang 1000, la suite sera minorée par le plus petit des termes parmi $u_0, u_1, \ldots, u_{1\ 000}$ ; en effet, tous les termes suivants seront de toute façon plus grands que $u_{1\ 000}$).
2. Faux, par exemple $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0 mais $u_{n+1} - u_n$ change de signe en permanence.
3. C'est également faux, on peut par exemple prendre $u_n = n^2$ si $n$ est pair, et $u_n = (n-1)^2 - 1$ si $n$ est impair. La suite n'est pas croissante à partir d'un certain rang puisque chaque terme d'indice impair est plus petit que le terme d'indice pair qui le précède, et pourtant elle diverge vers $+\infty$.
4. C'est tout à fait faux, par exemple la suite utilisée dans la question précédente a des valeurs toujours plus grandes que $n - 2$ (je vous laisse le vérifier) qui est une suite croissante.
5. Faux, par exemple $(-1)^n$ ne converge pas alors que sa valeur absolue est constante égale à 1 (et donc convergente).
6. Vrai, dire que $|u_n - 0| < \varepsilon$ est la même chose que $|u_n| - 0 < \varepsilon$.

## Exercice 3 (* à **)

- On peut écrire $u_n = \dfrac{3^n}{4^n} - \dfrac{2^n}{4^n} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. La suite est donc une différence de deux suites géométriques dont les raisons sont comprises entre $-1$ et 1. Ces deux suites convergent donc vers 0, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

- On peut développer : $u_n = 2e^{-n} - ne^{-n}$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$, donc le premier terme de la différence tend vers 0. Le deuxième peut s'écrire sous la forme $\dfrac{n}{e^n}$, c'est un cas d'école de croissance comparée, il tend également vers 0. Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Pour un quotient de polynôme, vous êtes autorisés à utiliser la règle du quotient des termes de plus haut degré : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-3n+2}{2n^2+5n-34} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2n^2} = \dfrac{1}{2}$.
- Utilisation de la quantité conjuguée très conseillée pour ce calcul :
$u_n = \dfrac{(\sqrt{n^2-1}-n)(\sqrt{n^2-1}+n)}{\sqrt{n^2-1}+n} = \dfrac{n^2-1-n^2}{\sqrt{n^2-1}+n} = \dfrac{-1}{\sqrt{n^2-1}+n}$.
Le dénominateur de cette fraction ayant clairement pour limite $+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- La principale difficulté est la manipulation des factorielles : $u_n = \dfrac{n! \times (n+1) \times (n+2)}{(n^2+1) \times n!} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{n^2+1} = \dfrac{n^2+3n+2}{n^2+1}$. Reste à utiliser la règle des termes de plus haut degré pour obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- Il faut simplement faire les choses méthodiquement. D'un côté, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{2n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{2n}} = e^0 = 1$ ; de l'autre côté, en utilisant la règle des termes de plus haut degré, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{n}{n+2}\right) = \ln(1) = 0$. Il ne reste plus qu'à additionner les deux termes pour obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- On peut factoriser si on le souhaite numérateur et dénominateur par $n$, mais le plus simple reste sûrement d'encadrer le quotient en utilisant que $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$. On obtient ainsi, $\forall n \geqslant 2$, $\dfrac{n-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{n-1}$, soit $1 - \dfrac{2}{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1 + \dfrac{2}{n-1}$. Les deux membres extrêmes de l'encadrement ayant la même limite 1, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- Revenons à la définition du sinus hyperbolique : $u_n = \dfrac{e^{2n}-e^{-2n}}{2} - (e^n - e^{-n}) = e^n\left(\dfrac{e^n}{2} - 1\right) - \dfrac{e^{-2n}}{2} + e^{-n}$. Une simple application des règles de calcul sur les sommes et produits de limite permet alors d'obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Pour celle-ci, difficile de s'en sortir sans équivalents, ou du moins sans une utilisation subtile des taux d'accroissement : comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{\pi^2}{n^2} = 1$, on peut dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{\pi^2}{n^2}) - \ln(1)}{1+\frac{\pi^2}{n^2}} = \ln'(1) = 1$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \ln\left(1+\dfrac{\pi^2}{n^2}\right) = \pi^2$. Or, $n\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{\pi^2}{n^2}\right)} = \sqrt{n^2\ln\left(1+\dfrac{\pi^2}{n^2}\right)}$, donc tout ce qui se trouve dans l'arctangente définissant $u_n$ a pour limite $\dfrac{\sqrt{\pi^2}}{4} = \dfrac{\pi}{4}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \arctan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

## Exercice 4 (**)

Les deux conditions peuvent se traduire de la façon suivante : $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} = q$, et $2b - a = 3c - 2b = q$. La première relation revient à dire que $b = aq$ et $c = bq = aq^2$, d'où en remplaçant dans la deuxième donne $2aq - a = 3aq^2 - 2aq (= q)$, d'où $3aq^2 - 4aq + a = 0$, soit en factorisant par $a$ qui est supposé non nul $3q^2 - 4q + 1 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet deux racines réelles $q_1 = \dfrac{4+2}{6} = 1$, et $q_2 = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{1}{3}$. Si $q = 1$, la condition $2aq - a = q$ donne $a = 1$, puis $b = aq = 1$ et $c = bq = 1$ ; et si $q = \dfrac{1}{2}$, on obtient $\dfrac{2}{3}a - a = \dfrac{1}{2}$, soit $a = -\dfrac{3}{2}$, puis $b = \dfrac{1}{3}a = -\dfrac{1}{2}$ et $c = \dfrac{1}{3}b = -\dfrac{1}{6}$. Les deux seules possibilités sont donc d'avoir $a = b = c = q = 1$ (auquel cas les trois termes consécutifs de la suite géométrique sont 1, 1 et 1, et les trois termes consécutifs de la suite arithmétique sont 1, 2 et 3) ; ou $q = \dfrac{1}{3}$, donc $a = -\dfrac{3}{2}$, $b = -\dfrac{1}{2}$ et $c = -\dfrac{1}{6}$ (auquel cas les trois termes consécutifs de la suite géométrique sont $-\dfrac{3}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{1}{6}$, et les trois termes consécutifs de la suite arithmétique sont $-\dfrac{3}{2}$, $-1$ et $-\dfrac{1}{2}$).

## Exercice 5 (*)

1. La suite $(u_n)$ est arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = 4x - 6$, ce qui donne $x = 2$. On pose donc $v_n = u_n - 2$, et on vérifie que la suite auxiliaire est géométrique : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 4u_n - 6 - 2 = 4u_n - 8 = 4(u_n - 2)$. La suite $(v_n)$ est donc géométrique de raison 4, et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = -1$. On a donc $v_n = -4^n$, puis $u_n = v_n + 2 = 2 - 4^n$.
2. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 3x + 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines réelles $r = \dfrac{3+1}{2} = 2$ et $s = \dfrac{3-1}{2} = 1$. La suite $(u_n)$ a donc un terme général de la forme $u_n = \alpha 2^n + \beta$, avec, en utilisant les valeurs initiales, $u_0 = \alpha + \beta = 0$ et $u_1 = 2\alpha + \beta = 1$. En soustrayant les deux équations on obtient $\alpha = 1$, puis $\beta = -\alpha = -1$, donc $u_n = 2^n - 1$.
3. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 6x + 9 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 36 - 36 = 0$, et admet une racine double $r = \dfrac{6}{2} = 3$. La suite $(u_n)$ a donc un terme général de la forme $u_n = (\alpha + \beta n)3^n$, avec, en utilisant les valeurs initiales, $u_0 = \alpha \times 3^0 = 0$ et $u_1 = (\alpha + \beta) \times 3^1 = 1$. La première équation donne $\alpha = 0$, puis la deuxième donne $\beta = \dfrac{1}{3}$, d'où $u_n = \dfrac{1}{3}n3^n = n3^{n-1}$ (formule valable seulement si $n \geqslant 1$).
4. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = \dfrac{1}{4} + 2 = \dfrac{9}{4}$ et admet donc pour racines $r_1 = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1$ (qui était aussi une racine évidente), et $r_2 = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\dfrac{1}{2}$. On peut donc écrire $u_n = \alpha + \beta\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$. Avec les conditions initiales données, $u_0 = \alpha + \beta = 1$ et $u_1 = \alpha - \dfrac{1}{2}\beta = 2$, donc $\dfrac{3}{2}\beta = -1$, soit $\beta = -\dfrac{2}{3}$ puis $\alpha = \dfrac{5}{3}$. On conclut que $u_n = \dfrac{5}{3} + \dfrac{1}{3(-2)^{n-1}}$.

   Autre méthode, posons donc $v_n = u_{n+1} - u_n$, alors $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + u_n}{2} - u_{n+1} = \dfrac{u_n - u_{n+1}}{2} = -\dfrac{1}{2}v_n$. La suite $(v_n)$ est donc géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_1 - u_0 = 1$, donc $v_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$. On en déduit que $u_{n+1} = u_n + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout entier $n$. On peut alors écrire $u_n = u_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^k$ (si ça ne vous semble pas clair, faites une belle récurrence), donc $u_n = 1 + \dfrac{1 - (-\frac{1}{2})^n}{1 + \frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{2}{3}\left(1 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right) = \dfrac{5}{3} + \dfrac{1}{3(-2)^{n-1}}$. On retrouve bien sûr la même expression.

5. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $3x^2 - 4x + 1 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 16 - 12 = 4$, et qui admet donc deux racines $r = \frac{4+2}{6} = 1$, et $s = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$. On en déduit la forme générale de la suite : $u_n = \alpha + \frac{\beta}{3^n}$. En utilisant les valeurs des deux premiers termes, on a $u_0 = \alpha + \beta = 2$ et $u_1 = \alpha + \frac{1}{3}\beta = \frac{10}{3}$. En soustrayant les deux équations, on obtient $\frac{2}{3}\beta = 2 - \frac{10}{3} = -\frac{4}{3}$, soit $\beta = -2$, puis $\alpha = 4$. On a finalement $u_n = 4 - \frac{2}{3^n}$.
6. Considérons d'abord la suite $(v_n)$ pour laquelle $v_0 = 1$, $v_1 = 11$, $v_2 = 111$ etc. Une façon de la décrire est de dire que $v_0 = 1$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 10v_n + 1$ (en effet, quand on multiplie par 10, on ajoute un 0 à la fin, et en ajoutant 1 on le transforme en 1). Autrement dit, la suite $(v_n)$ est arithmético-géométrique. Son équation de point fixe $x = 10x + 1$ a pour solution $x = -\frac{1}{9}$. On pose donc $w_n = v_n + \frac{1}{9}$, la suite $(w_n)$ devrait être géométrique, ce qu'on vérifie sans peine : $w_{n+1} = v_{n+1} + \frac{1}{9} = 10v_n + 1 + \frac{1}{9} = 10\left(v_n + \frac{1}{9}\right) = 10w_n$. La suite $(w_n)$ est donc géométrique de raison 10 et de premier terme $w_0 = v_0 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$. Autrement dit, $w_n = \frac{10^{n+1}}{9}$, et $v_n = w_n - \frac{1}{9} = \frac{10^{n+1}-1}{9}$. Reste à calculer $u_n$, c'est-à-dire à calculer les sommes partielles de la suite $(v_n)$ : $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{9}\sum_{k=0}^{n-1} 10^{k+1} - 1 = \frac{10}{9} \times \frac{1-10^n}{1-10} - \frac{n-1}{9} = \frac{10^n - 1}{81} - \frac{n-1}{9}$.
7. Séparons donc parties réelle et imaginaire en posant $z_n = a_n + ib_n$. On peut alors écrire $a_0 = 0$, $b_0 = 2$, et pour tout entier $n$, $a_{n+1} + ib_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + 2ib_n - a_n + ib_n) = \frac{1}{3}a_n + ib_n$. Autrement dit, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$ et $b_{n+1} = b_n$. La suite $(b_n)$ est donc constante égale à 2, et la suite $(a_n)$ géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme 0. Ah ben en fait on a donc toujours $z_n = 2i$ (c'était bien la peine de se fatiguer).

# Exercice 6 (**)

Notons donc $v_n = u_n + an^2 + bn + c$, alors $v_{n+1} = u_{n+1} + a(n+1)^2 + b(n+1) + c = 2u_n + 2n^2 - n + an^2 + 2an + a + bn + b + c = 2u_n + (a+2)n^2 + (2a+b-1)n + a + b + c$. Pour que $(v_n)$ soit géométrique, on doit avoir $v_{n+1} = qv_n = qu_n + aqn^2 + bqn + cq$. Il est nécessaire d'avoir $q = 2$, et en identifiant ensuite les coefficients des deux formules obtenues, on a $a + 2 = 2a$, $2a + b - 1 = 2b$ et $a + b + c = 2c$, ce qui donne successivement $a = 2$, puis $b = 2a - 1 = 3$, et enfin $c = a + b = 5$. Avec ces valeurs, la suite $(v_n)$ est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 + a \times 0^2 + b \times 0 + c = 2 + 5 = 7$. Conclusion de ces calculs : $v_n = 7 \times 2^n$, puis $u_n = v_n - an^2 - bn - c = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$.

# Exercice 7 (**)

1. La suite $(u_n)$ est une suite récurrente. Nous n'avons malheureusement pas encore vu en classe comment traiter ce genre de suite de façon systématique, on va donc s'en sortir avec les moyens du bord. Cherchons à déterminer sa monotonie : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + \frac{a}{2u_n} - u_n = \frac{a}{2u_n} - \frac{1}{2}u_n = \frac{a - u_n^2}{2u_n} = \frac{(\sqrt{a} - u_n)(\sqrt{a} + u_n)}{2u_n}$. Une récurrence triviale permet de prouver que tous les termes de la suite sont positifs : c'est vrai pour $u_0$ par hypothèse, et si $u_n > 0$, $a$ étant lui-même positif, $u_{n+1}$ le sera également. Le facteur $\sqrt{a} + u_n$ est donc aussi positif, et le signe de $u_{n+1} - u_n$

ne dépend que de la position de $u_n$ par rapport à $\sqrt{a}$. Posons donc pour nous aider $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{a}{2x}$ (de façon à avoir $f(u_n) = u_{n+1}$). La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2} = \frac{x^2 - a}{2x^2}$. Cette dérivée s'annule en $\sqrt{a}$, la fonction $f$ y admet un minimum de valeur $f(\sqrt{a}) = \frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{a}$. On en déduit que, $\forall x > 0$, $f(x) \leqslant \sqrt{a}$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant \sqrt{a}$, et $u_{n+1} - u_n$ est donc nécessairement négatif à partir du rang 1 (pour $n = 0$, cela dépend de la valeur choisie). La suite est donc décroissante à partir du rang 1. Étant minorée par 0, elle converge nécessairement vers un réel $l$. Revenons à la relation de récurrence pour déterminer $l$ : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2}u_n + \frac{a}{2u_n} = \frac{1}{2}l + \frac{a}{2l}$, donc on doit avoir $l = \frac{l}{2} + \frac{a}{2l}$ (notons au passage que $l$ ne peut pas être nulle, sinon $u_{n+1}$ ne converge plus), soit $2l^2 = l^2 + a$, donc $l = \sqrt{a}$ (impossible que la limite soit négative). Conclusion : la suite $(u_n)$ converge vers $\sqrt{a}$.

2. Calculons donc $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{2}u_n + \frac{a}{2u_n} - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}u_n + \frac{a}{2u_n} - \sqrt{a}} = \frac{u_n^2 + a - 2\sqrt{a}u_n}{u_n^2 + a + 2\sqrt{a}u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{(u_n + \sqrt{a})^2} = v_n^2$. On peut alors prouver par récurrence que $v_n = v_0^{(2^n)}$. En effet, c'est trivialement vrai pour $n = 0$, et si on le suppose au rang $n$, alors $v_{n+1} = v_n^2 = (v_0^{(2^n)})^2 = v_0^{(2\times 2^n)} = v_0^{(2^{n+1})}$, la propriété est donc vrai au rang $n+1$ et la récurrence fonctionne.
3. D'après la question précédente, $u_n - \sqrt{a} = v_0^{2^n}(u_0 + \sqrt{a})$ (même pas besoin de majoration, on a la valeur exacte). Pour $a = 2$, et par exemple $u_0 = 1$ (sans valeur de $u_0$, l'application numérique est impossible), on a $u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{1 + \sqrt{2}}\right)^{2^n} \times (1 + \sqrt{2})$ (on a changé le signe dans la puissance pour prendre la valeur absolue). Il suffit donc de prendre un $n$ pour lequel $2^n \ln\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}\right) \geqslant -100\ln(10) - \ln(1 + \sqrt{2})$, ce qui donne $2^n \geqslant 132$, soit $n \geqslant 8$ (encore un coup de ln si on veut être très précis). Il suffit donc de prendre le terme d'indice huit de la suite pour avoir une valeur approchée de la limite correcte à $10^{-100}$ près !

## Exercice 8 (***)

1. Commençons donc par prouver la croissance de $f$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $f(x) = x\ln\frac{x+a}{x} = x\ln(x + a) - x\ln x$, donc $f'(x) = \ln(x + a) + \frac{x}{x+a} - \ln x - 1$, et $f''(x) = \frac{1}{x+a} + \frac{x + a - x}{(x+a)^2} - \frac{1}{x} = \frac{x(x+a) + ax - (x+a)^2}{x(x+a)^2} = \frac{-a^2}{x(x+a)^2} < 0$. La fonction $f'$ est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, $f'(x) = \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) + \frac{x}{x+a} - 1$ a pour limite 0 en $+\infty$ (en effet, ce qui se trouve dans le ln a pour limite 1 donc le terme avec le ln tend vers 0 ; et en conservant les termes de plus haut degré, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x+a} = 1$). Il est inutile ici (même si ce n'est pas spécialement difficile) de calculer la limite de $f'$ en 0, on peut déjà conclure que $f'$ est toujours positive, ce dont on déduit que $f$ est bien croissante.
Il faut maintenant faire le lien avec la suite $(u_n)$ en remarquant que $\ln(u_n) = n\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = f(n)$. La fonction $f$ étant croissante, on aura certainement, pour tout entier $n$, $f(n) \leqslant f(n+1)$, c'est-à-dire $\ln(u_n) \leqslant \ln(u_{n+1})$. Un petit passage à l'exponentielle donne alors $u_n \leqslant u_{n+1}$, ce qui prouve que la suite $(u_n)$ est croissante.
2. Le plus simple est de démontrer séparément chacune des deux inégalités en faisant tout passer d'un seul côté et en faisant des études de fonctions. Posons ainsi $g(t) = t - \ln(1+t)$. La fonction

$g$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ (elle est même définie entre $-1$ et $0$, mais pour ce qu'on nous demande, pas la peine de s'y intéresser), de dérivée $g'(t) = 1 - \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{t}{1+t} \geqslant 0$. La fonction $g$ est donc croissante, et comme $g(0) = 0$, elle est toujours positive, ce qui prouve que $t - \ln(1+t)$ sur $\mathbb{R}_+$, soit $\ln(1+t) \leqslant t$.

De même, on pose $h(t) = \ln(1+t) - \dfrac{t}{1+t}$, fonction dont la dérivée vaut $\dfrac{1}{1+t} - \dfrac{1+t-t}{(1+t)^2} = \dfrac{1+t-1}{(1+t)^2} = \dfrac{t}{(1+t)^2} \geqslant 0$. Cette fonction est donc également croissante, et vérifie aussi $h(0) = 0$, d'où sa positivité sur $\mathbb{R}_+$ et l'encadrement souhaité.

3. On a vu que $\ln u_n = n \ln\left(1 + \dfrac{a}{n}\right)$, donc en posant $t = \dfrac{a}{n}$ et en appliquant l'encadrement de la question précédente, $\dfrac{\frac{a}{n}}{1+\frac{a}{n}} \leqslant n\ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right) \leqslant \dfrac{a}{n}$, soit $\dfrac{\frac{a}{n}}{\frac{n+a}{n}} \leqslant \dfrac{1}{n}\ln u_n \leqslant \dfrac{a}{n}$, ou encore $\dfrac{a}{a+n} \leqslant \dfrac{1}{n}\ln u_n \leqslant \dfrac{a}{n}$. Il ne reste plus qu'à tout multiplier par $n$ pour obtenir l'encadrement demandé.
4. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{na}{n+a} = a$ (on garde les termes de plus haut degré, $a$ étant toujours une constante), le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $\ln(u_n)$ converge vers $a$. La suite $(u_n)$ a donc pour limite $e^a$.
5. Pour $a = 1$, on obtient le résultat classique suivant : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

## Exercice 9 (**)

1. En effet, $a_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = 3u_n + v_n + 1 + 2 - 2u_n = u_n + v_n + 3 = a_n + 3$. La suite est bien arithmétique de raison 3 et de premier terme $a_0 = 2$, donc $a_n = 2 + 3n$.
2. Allons-y : $b_{n+1} = 2u_{n+1} + v_{n+1} = 6u_n + 2v_n + 2 + 2 - 2u_n = 4u_n + 2v_n + 4 = 2b_n + 4$. La suite est bien arithmético-géométrique. Son équation de point fixe $x = 2x + 4$ a pour solution $x = -4$, on pose donc $c_n = b_n + 4$, et on vérifie que $(c_n)$ est une suite géométrique : $c_{n+1} = b_{n+1} + 4 = 2b_n + 8 = 2(b_n + 4) = 2c_n$. La suite $(c_n)$ est donc géométrique de raison 2 et de premier terme $c_0 = b_0 + 4 = 2u_0 + v_0 + 4 = 7$. On en déduit que $c_n = 7 \times 2^n$, puis $b_n = c_n - 4 = 7 \times 2^n - 4$.
3. Il suffit de combiner $a_n$ et $b_n$ : en faisant simplement leur différence, on obtient immédiatement $u_n = b_n - a_n = 7 \times 2^n - 4 - (2 + 3n) = 7 \times 2^n - 3n - 6$. Ensuite, $v_n = a_n - u_n = 2 + 3n - u_n = 8 + 6n - 7 \times 2^n$.
4. Calculons : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 7 \times 2^k - 3k - 6 = 7 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1-2} - 3 \times \frac{n(n+1)}{2} - 6(n+1) = 7 \times 2^{n+1} - 7 - \frac{3n(n+1)}{2} - 6n - 6 = 7 \times 2^{n+1} - \frac{3}{2}n^2 - \frac{15n}{2} - 13$. Ce résultat n'a absolument aucun intérêt, pas plus d'ailleurs que le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, qui découle d'un simple résultat de croissance comparée.

## Exercice 10 (*)

1. Il faut donc résoudre l'équation $\dfrac{4x+2}{x+5} = x$, soit $4x + 2 = x^2 + 5x$, qui se ramène à l'équation du second degré $x^2 + x - 2 = 0$, qui a pour racines évidentes $a = -2$ et $b = 1$.
2. Pour cela, il faut que $u_n$ ne soit jamais égal à $a$. On sait déjà que c'est le cas pour $u_0$ qui est supposé strictement positif, et on peut démontrer aisément par récurrence que tous les termes de la suite seront également strictement positifs, ce qui répond à la question. Mais on

va chercher à faire plus rigolo : remarquons que $u_{n+1} = a$ équivaut à $f(u_n) = a$. Or, l'équation $f(x) = a$ se ramène à $4x + 2 = -2(x+5)$, soit $6x = -12$, donc $x = -2 = a$. Autrement dit, pour avoir $u_{n+1} = a$, il faut déjà avoir $u_n = a$. Notons alors $n$ le plus petit entier pour lequel $u_n = a$ (en supposant qu'un tel entier existe). On a nécessairement $n > 0$ puisque $u_0 \neq a$, mais d'après ce qui précède, cela implique alors $u_{n-1} = a$, ce qui contredit la minimalité de $n$. Autrement dit, il est impossible qu'un tel entier $n$ existe, et $u_n$ est donc toujours différent de $a$.

3. Un calcul peu subtil : $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \dfrac{\frac{4u_n+2}{u_n+5}-1}{\frac{4u_n+2}{u_n+5}+2} = \dfrac{4u_n+2-u_n-5}{4u_n+2+2u_n+10} = \dfrac{3u_n-3}{6u_n+12} = \dfrac{1}{2}\dfrac{u_n-1}{u_n+2} = \dfrac{1}{2}v_n$. La suite $(v_n)$ est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+2} = -\dfrac{1}{2}$. Conclusion : $v_n = -\dfrac{1}{2^{n+1}}$.
4. Puisque $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+2}$, $v_nu_n + 2v_n = u_n - 1$, donc $u_n(v_n-1) = -1-2v_n$, et $u_n = \dfrac{1+2v_n}{1-v_n} = \dfrac{1-\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^{n+1}}} = \dfrac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}+1}$.

## Exercice 11 (*)

Il y a deux points sur les trois qui sont très faciles à prouver :

- $v_n - u_n = \dfrac{1}{n \times n!}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.
- $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$, donc la suite $(u_n)$ est croissante.

Ne reste plus qu'à prouver que $(v_n)$ est décroissante : $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - u_n - \dfrac{1}{n \times n!} = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \dfrac{1}{n\times n!} = \dfrac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n\times(n+1)\times(n+1)!} = \dfrac{n^2+2n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)(n+1)!} = \dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$. La suite $(v_n)$ est donc bien décroissante, et les deux suites étant adjacentes, elles convergent donc vers une limite commune.

Notons donc $l$ la limite commune des deux suites, et supposons que $l = \dfrac{a}{b}$, avec $a$ et $b$ deux entiers naturels. Comme la suite $(u_n)$ est strictement croissante, et la suite $(v_n)$ strictement décroissante, on peut écrire, pour tout entier $n$, $u_n < l < v_n$, soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} < \frac{a}{b} < \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n\times n!}$. C'est en particulier vrai lorsque $n = b$ : $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=b} \frac{1}{k!} < \frac{a}{b} < \sum_{k=0}^{k=b} \frac{1}{k!} + \frac{1}{b\times b!}$. Multiplions cet encadrement par $b \times b!$ : $\displaystyle b\sum_{k=0}^{k=b} \frac{b!}{k!} < a \times b! < b\sum_{k=0}^{k=b} \frac{b!}{k!} + 1$. À gauche, chaque quotient $\dfrac{b!}{k!}$ est un entier lorsque $k \leqslant b$ (en effet, $b!$ est un multiple de $k!$ pour tous les entiers $k$ compris entre 0 et $b$), donc le membre de gauche est une somme d'entiers et appartient à $\mathbb{N}$. Notons ce nombre $p$. Le membre de droite est le même que celui de gauche, avec un simple $+1$, donc est égal à $p+1$. On a donc $p < a \times b! < p+1$. Autrement dit, le nombre $a \times b!$, qui est lui aussi un nombre entier, est strictement compris entre les deux entiers consécutifs $p$ et $p+1$. Ce n'est pas possible ! On a prouvé par l'absurde que $l$ ne pouvait pas être un nombre rationnel (pour les curieux, la valeur de $l$ est en fait le nombre $e$ que nous connaissons bien depuis l'étude de la fonction exponentielle).

## Exercice 12 (**)

1. Il suffit pour cela de prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$. C'est vrai au rang 0 par hypothèse, et si $u_n$ et $v_n$ sont tous deux strictement positifs, ce sera aussi le cas de $u_n + v_n$ et de $u_n v_n$, donc de $u_{n+1}$ et $v_{n+1}$. Ainsi, les deux suites sont bien définies.
2. Supposons $n \geqslant 1$ (pour $n = 0$ l'inégalité est vraie par hypothèse). On a $v_n - u_n = \dfrac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} - \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} = \dfrac{u_{n-1} + v_{n-1} - 2\sqrt{u_{n-1}}\sqrt{v_{n-1}}}{2} = \dfrac{(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}})^2}{2} > 0$, donc $u_n \leqslant v_n$.
3. C'est désormais facile en utilisant le résultat de la question précédente : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) > 0$ puisque $v_n > u_n$, donc $(u_n)$ est strictement croissante. De même, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2} < 0$, donc $(v_n)$ est décroissante.
4. On ne peut pas affirmer que les suites sont adjacentes car on ne sait pas si $(u_n - v_n)$ tend vers 0. Par contre, $(u_n)$ étant croissante et majorée par exemple par $v_0$ (car $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ puisque la suite $(v_n)$ est decroissante), le théorème de convergence monotone permet d'affirmer qu'elle est convergente vers une certaine limite $l$. De même, $(v_n)$ est décroissante et minorée (encore plus simplement, par 0), donc converge vers une limite $l'$. La suite $(v_{n+1})$ converge aussi vers $l'$, mais comme $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, on a donc, par passage à la limite, $l' = \dfrac{l + l'}{2}$, d'où $\dfrac{l'}{2} = \dfrac{l}{2}$, soit $l = l'$. Finalement, les deux suites ont bien la même limite (appelée moyenne arithmético-géométrique des deux réels $a$ et $b$).

## Exercice 13 (**)

1. C'est un simple calcul : $(n+p+2)u_{n+2} = \dfrac{(n+p+2)(n+2)!p!}{(n+p+2)!} = \dfrac{(n+2)!p!}{(n+p+1)!}$, et $(n+2)u_{n+1} = \dfrac{(n+2)(n+1)!p!}{(n+p+1)!} = \dfrac{(n+2)!p!}{(n+p+1)!}$. Les deux quantités sont bien égales.
2. Faisons donc une récurrence. Pour $n = 0$, $S_0 = 0$ (il n'y a rien dans la somme !) et comme $u_1 = \dfrac{1}{p+1}$, $\dfrac{1}{p-1}(1 - (p+1)u_1) = \dfrac{1}{p-1}(1-1) = 0$. Supposons donc l'égalité vérifiée au rang $n$, alors $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = \dfrac{1}{p-1}(1 - (n+p+1)u_{n+1}) + u_{n+1} = \dfrac{1}{p-1}(1 - (n+p+1)u_{n+1} + (p-1)u_{n+1}) = \dfrac{1}{p-1}(1 - (n+2)u_{n+1}) = \dfrac{1}{p-1}(1 - (n+p+2)u_{n+2})$ en utilisant le résultat de la question précédente. C'est exactement ce qu'on doit démontrer pour prouver la propriété au rang $n+1$, par principe de récurrence, la propriété est donc toujours vraie.
3. Il suffit d'écrire que $v_n = \dfrac{(n+p)n!p!}{(n+p)!} = \dfrac{p!}{(n+1)(n+2)\dots(n+p-1)}$. Ce quotient a certainement pour limite 0 quand $n$ tend vers $+\infty$ (rappelons que $p$ est fixé).
4. On a prouvé plus haut que $S_n = \dfrac{1 - v_{n+1}}{p-1}$. Si $(v_n)$ tend vers 0, on en déduit immédiatement que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{1}{p-1}$.

## Exercice 14 (***)

Supposons donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, et choisissons un $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe un entier $n_0$ à partir duquel on aura $|u_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Découpons alors $v_n$ en deux parties : ce qui se passe avant $n_0$ et après $n_0$ : si $n > n_0$, $v_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} u_k = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n_0} u_k + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=n_0+1}^{k=n} u_k$. La première somme est une constante (on peut modifier $n$, mais $n_0$, lui, est fixé), donc, quand on la divise par $n$, ça va finir par se rapprocher de 0. Autrement dit, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_1$, $\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{k=n_0} u_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Quand à la deuxième somme, elle est constituée de $n - n_0$ termes qui, d'après ce qu'on a dit plus haut, sont tous inférieurs (en valeur absolue) à $\frac{\varepsilon}{2}$, donc par inégalité triangulaire sa valeur absolue est inférieure à $(n - n_0)\frac{\varepsilon}{2}$, d'où $\frac{1}{n}\left|\sum_{k=n_0+1}^{k=n} u_k\right| \leqslant \frac{n-n_0}{n}\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (puisque $\frac{n-n_0}{n} \leqslant 1$). Conclusion, lorsque $n \geqslant \max(n_0; n_1)$, on a $|v_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ceci suffit à prouver que la suite $(v_n)$ tend vers 0, et a donc bien la même limite que $(u_n)$.

Passons désormais au cas général (qui va être facile en fait), c'est à dire lorsque $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \neq 0$. Posons $w_n = u_n - l$, cette suite auxilaire a pour limite 0, donc on peut lui appliquer ce qu'on vient de démontrer : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} w_k = 0$. Or, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} w_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}(u_k - l) = \frac{1}{n}\left((\sum_{k=1}^{k=n} u_k) - nl\right) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} u_k\right) - l$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} u_k = l$, ce qu'on voulait prouver.

Posons pour plus de simplicité $w_n = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{k=n} ku_k$, et supposons dans un premier temps que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Il existe donc un rang $n_0$ à partir duquel $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. On découpe la somme en deux comme précédemment : $w_n = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n_0} ku_k + \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=n_0+1}^{n} ku_k$. La première moitié a certainement une limite nulle, donc deviendra inférieur en valeur absolue à $\frac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain rang $n_1$. Quant à la deuxième moitié, on la majore en valeur absolue (comme dans la question 1) par $\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=n_0}^{n} \frac{k\varepsilon}{2} \leqslant \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)}{2}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$. On a donc globalement, lorsque $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, $|w_n| \leqslant \varepsilon$, et $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$. Comme $v_n = \frac{n(n+1)}{2n^2}w_n$, avec $\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Supposons désormais $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \neq 0$. Posons comme précédemment $z_n = u_n - l$, alors $w_n = \frac{2}{n(n+1)}\sum kz_k$ tend vers 0. Or, $w_n = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n}(ku_k - kl) = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n} ku_k - l$. Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n} ku_k = l$, soit en multipliant par $\frac{n(n+1)}{2n^2}$ qui tend toujours vers $\frac{1}{2}$, la conclusion $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} ku_k = \frac{l}{2}$.

## Exercice 15 (***)

1. Si $z_0$ est réel, tous les termes de la suite seront également réels. Or, pour un réel $\frac{x+|x|}{2}$ est égal à 0 si $x$ est négatif, et égal à $x$ si $x$ est positif. Si $z_0$ est un réel négatif, la suite sera donc nulle à partir du rang 1 (une fois que $z_1 = 0$, on ne bouge plus), et si $z_0$ est un réel positif, elle est constante égale à $z_0$.

2. Il suffit d'écrire que $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2} = \dfrac{r_n e^{i\theta_n} + r_n}{2} = \dfrac{r_n(1 + e^{i\theta_n})}{2}$. Une petit factorisation par l'angle moitié s'impose : $z_{n+1} = r_n e^{i\frac{\theta_n}{2}} \times \dfrac{e^{i\frac{\theta_n}{2}} + e^{\frac{-i\theta_n}{2}}}{2} = r_n \cos(\theta_n) e^{i\frac{\theta_n}{2}}$. Autrement dit, on aura simplement $r_{n+1} = r_n \cos(\theta_n)$ et $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$.
3. Pour $\theta_n$, c'est facile, la suite est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, et $\theta_n = \dfrac{\theta}{2^n}$. Pour $r_n$, c'est un peu plus laid puisque $r_n = r \times \cos(\theta) \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \cos\left(\dfrac{\theta}{4}\right) \times \cdots \times \cos\left(\dfrac{\theta}{2^{n-1}}\right)$. A priori, ce produit n'est pas très sympathique, mais une astuce diabolique permet de le simplifier en un coup d'oeil : multiplions-le donc par $\sin\left(\dfrac{\theta}{2^{n-1}}\right)$ ! En effet, en utilisant $n$ fois de suite la formule de duplication $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$, on va trouver $\cos(\theta)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{4}\right) \times \cdots \times \cos\left(\dfrac{\theta}{2^{n-1}}\right) \times \sin\left(\dfrac{\theta}{2^{n-1}}\right) = \dfrac{1}{2}\cos(\theta)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{4}\right) \times \cdots \times \cos\left(\dfrac{\theta}{2^{n-2}}\right) \times \sin\left(\dfrac{\theta}{2^{n-2}}\right) = \cdots = \dfrac{1}{2^{n-1}}\cos(\theta)\sin(\theta) = \dfrac{\sin(2\theta)}{2^n}$. On en déduit que $r_n = \dfrac{r\sin(2\theta)}{2^n}$ (on peut faire une belle récurrence si on veut être plus rigoureux que ce que je n'ai fait).
4. Les deux suites $(r_n)$ et $(\theta_n)$ ont une limite nulle, ce qui suffit à prouver que la suite $(z_n)$ tend vers 0 (si on tient à faire réapparaitre les parties réelle et imaginaire, il suffit de constater qu'elles sont respectivement égales à $r_n \cos(\theta_n)$ et à $r_n \sin(\theta_n)$ pour conclure aisément).

# Problème (***)

## Partie A : Exemples

1. (a) On a dans ce cas $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} 2 \times 3 = 6(n+1)$.

   (b) Dans ce deuxième exemple $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} 2^k \times 3^{n-k} = 3^n \sum_{k=0}^{k=n} 2^k \times 3^{-k} = 3^n \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3^n \frac{1 - (\frac{2}{3})^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3^{n+1}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.
2. (a) On calcule $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=m} u_k = \sum_{k=n+1}^{k=m} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{k=m-n-1} \frac{1}{2^{n+1+k}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{k=m-n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^{m-n}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^{m-n}}\right) = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^n} = u_n$, donc l'inégalité demandée est vraie.

   (b) Il s'agit « simplement » de découper la somme constituant $w_{2n}$ en morceaux et de faire les bonnes majorations : $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=2n} u_k v_{2n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} u_k v_{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{k=2n-1} u_k v_{2n-k} + u_{2n} v_0$. La première somme est égale à $u_0 v_{2n} + u_1 v_{2n-1} + \cdots + u_n v_n$. Comme la suite $(v_n)$ est supposée décroissante et que tous les termes de $(u_n)$ sont positifs, elle est inférieure ou égale à $(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)v_n = u_0 v_n + v_n \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k \leqslant u_0 v_n + u_0 v_n = 2v_n$ (cette dernière inégalité découle de la question précédente). De même, en utilisant la décroissance de $(v_n)$, la deuxième somme est inférieure ou égale à $v_1 \displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=2n-1} u_k \leqslant v_1 u_n$ (toujours d'après la question précédente). En additionnant ces majorations, on obtient bien $w_{2n} \leqslant 2v_n + v_1 u_n + v_0 u_{2n}$.

La deuxième majoration est du même style : $w_{2n+1} = \sum_{k=0}^{k=n} u_k v_{2n+1-k} + \sum_{k=n+1}^{k=2n} u_k v_{2n+1-k} + u_{2n+1}v_0 \leqslant v_{n+1}u_0 + v_{n+1}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) + v_1 \sum_{k=n+1}^{k=2n} u_k + u_{2n+1}v_0 \leqslant 2v_{n+1} + v_1 u_n + v_0 u_{2n+1}$.

(c) Les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ont pour limite 0 (pour $(v_n)$, ça fait partie des hypothèses, et pour $(u_n)$ c'est une conséquence du fait qu'il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$). On en déduit aisément que $\lim_{n\to+\infty} v_0 u_{2n} + 2v_n + v_1 u_n = 0$, et pareil pour $2v_{n+1} + v_1 u_n + v_0 u_{2n+1}$. Comme de plus tous les termes de la suite $(w_n)$ sont positifs (ils sont constitués d'une somme de réels positifs), le théorème des gendarmes permet de dire que $\lim_{n\to+\infty} w_{2n} = \lim_{n\to+\infty} w_{2n+1} = 0$. Les deux sous-suites constituées des termes pairs et impairs convergeant vers la même limite, la suite $(w_n)$ converge également vers 0.

(d) D'après l'inégalité triangulaire, on aura $0 \leqslant |(u' \times v)_n| = \left|\sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k v_{n-k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{k=n} \left|\left(-\frac{1}{2}\right)^k v_{n-k}\right| = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2^k} v_{n-k} = w_n$. Comme on vient de voir que la suite $(w_n)$ convergeait vers 0, le théorème des gendarmes nous donne la convergence de $(|u' \times v|)$, et donc de $(u' \times v)$, vers 0.

## Partie B : Application à l'étude d'un ensemble de suites

1. Si $(u_n)$ est une suite décroissante, on a $\frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) = a_n \geqslant a_{n+1}$, donc la suite appartient effectivement à $A$. Au contraire, si $(u_n)$ est strictement croissante, on aura toujours $\frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) < u_n < u_{n+1}$, donc la suite n'appartient pas à $A$.

2. (a) La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$, donc elle admet deux racines $r = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1$ et $s = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$. Le terme général de la suite est donc bien de la forme $z_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

   (b) La suite définie par $u_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, par exemple, appartient à $A$ (elle vérifie la récurrence linéaire de la question précédente, et on vérifie facilement que ses termes sont tous positifs), mais n'est pas monotone puisque les termes d'indices pairs de la suites sont plus grands que 1 et les termes d'indices impairs plus petits que 1.

3. (a) Calculons donc, pour $n \geqslant 1$, $c_{n+1} - c_n = a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n - a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} = a_{n+1} - \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \leqslant 0$ puisque $(a_n) \in A$. La suite $(c_n)$ est donc décroissante. Comme elle est par ailleurs constituée de termes positifs (puisque c'est le cas de $(a_n)$), elle est minorée, donc elle converge.

   (b) Il semble assez naturel de procéder à une récurrence. Pour $n = 0$, l'égalité stipule que $\left(-\frac{1}{2}\right)^0 c_0 = a_0$, ce qui est effectivement vrai. Supposons désormais l'égalité vérifiée au rang $n$, alors $\sum_{k=0}^{k=n+1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n+1-k} = c_{n+1} + \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} c_{n-k} = c_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}a_n = a_{n+1}$. La propriété est donc vérifiée au rang $n+1$, et la récurrence achevée. Ca calcul prouve que les suites $b \times c$ et $a$ sont tout simplement identiques.

(c) La suite $(u_n)$ convergeant vers $l$, la suite $\varepsilon$ a pour limite 0. De plus, elle est décroissante à partir du rang 1 tout comme $(u_n)$, donc tous ses termes sont positifs (sinon elle ne pourrait pas converger vers 0). Elle vérifie donc les hypothèses faites sur la suite $(v_n)$ dans la partie précédente, et on peut en conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$.

(d) Ce n'est pas si dur que ça en a l'air : $d_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (c_{n-k} - l) = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} - l \sum\limits_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = a_n - l \frac{1-(-\frac{1}{2})^{n+1}}{1+\frac{1}{2}} = a_n + \frac{3}{2} l \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$. On peut également écrire que $a_n = d_n + \frac{3}{2} l \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

La toute dernière question est un simple calcul de limite : on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ (suite géométrique), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3} l$.