Feuille d'exercices n°21 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

5 juin 2014

Exercice 1 (* à ***)

- En écrivant $\dfrac{n-1}{3^n} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{n}{3^{n-1}} - \dfrac{1}{3^n}$, on reconnait une somme de deux séries géométriques (dont une dérivée) convergentes, et on calcule facilement $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{3^n} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}$ (il est normal que le résultat soit négatif, le premier terme de la somme est égal à -1 et les autres sont trop petits pour le compenser).
- On peut écrire, à partir de $n = 2$ (les deux premiers termes de la série sont de toute façon nuls), $\dfrac{n(n-1)}{n!} = \dfrac{1}{(n-2)!}$, ce qui permet de reconnaitre une série exponentielle convergente et de calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)x^n}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = x^2 e^x$.
- Inutile de beaucoup se fatiguer ici, $\dfrac{2n^2}{n^3-1} \sim \dfrac{2}{n}$, terme général d'une série divergente, donc notre série diverge (elle est à termes positifs à partir du rang 2).
- On peut écrire $\dfrac{1}{2^{2n+1}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4^n}$ pour reconnaitre une série gémétrique convergente, de somme $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{2}{3}$.
- Rien à faire ici, c'est un exemple direct de série exponentielle, de somme $4e^{-1} = \dfrac{4}{e}$.
- La série est à termes positifs et son terme général est équivalent à $\dfrac{1}{n^3}$, donc elle converge (comparaison avec une série de Riemann). Pour calculer sa somme, il faut faire un télescopage, en commençant par écrire $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$. En multipliant l'égalité par n et en évaluant pour $n = 0$, on trouve $a = \dfrac{1}{2}$. De même, en multipliant par $n+1$ et en prenant $n = -1$ on a $b = -1$. On trouve de même $c = \dfrac{1}{2}$, soit $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2(n+2)}$. Pour effectuer le télescopage, on travaille avec les sommes partielles : $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} =$

$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n}-\sum_{n=2}^{p+1}\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{p+2}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2(p+1)}+\frac{1}{2(p+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(p+1)}+\frac{1}{2(p+2)}$. Il y a bien convergence, vers la somme suivante : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}$.

- Encore des géométriques à faire apparaitre : $\frac{3+n2^n}{4^{n+2}}=\frac{3}{16}\times\frac{1}{4^n}+\frac{1}{32}\times\frac{n}{2^{n-1}}$, tout converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3+n2^n}{4^{n+2}}=\frac{3}{16}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{32}\times\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.
- Il y a un télescopage tout simple, mais il est n'est même pas utile de s'en rendre compter : $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}$, donc la série diverge (elle est à termes positifs).
- Le terme général de cette série (positive à partir de $n=1$) étant équivalent à $\frac{1}{4n^2}$, elle converge. De plus, $\frac{1}{4n^2-1}=\frac{a}{2n+1}+\frac{b}{2n-1}$, avec $a(2n-1)+b(2n+1)=1$ (pour changer, on met tout au même dénominateur et on identifie), soit $a+b=0$ et $b-a=1$, donc $b=\frac{1}{2}$ et $a=-\frac{1}{2}$. On en déduit que $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2k+1}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}$. La série converge donc vers $-\frac{1}{2}$.
- Il suffit de se souvenir que $\mathrm{ch}(n)=\frac{e^n+e^n}{2}$ pour écrire notre série comme somme de deux séries géométriques convergentes : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{ch}(n)}{3^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3e)^n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{e}{3}}+\frac{1}{1-\frac{1}{3e}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{3-e}+\frac{3e}{3e-1}\right)$ (inutile de tenter de simplifier plus).
- Le terme général de cette série à termes positifs est équivalent à $\frac{5}{4n^2}$, elle converge donc. On effectue une décomposition en éléments simples : $\frac{5}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{a}{2n+1}+\frac{b}{2n+3}=\frac{a(2n+3)+b(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$. Par identification, on obtient $2a+2b=0$, soit $b=-a$, et $3a+b=5$, dont on déduit $a=\frac{5}{2}$ et $b=-\frac{5}{2}$. Autrement dit, $\sum_{n=0}^{p}\frac{5}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{5}{2}\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{2n+1}-\frac{5}{2}\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{2n+3}=\frac{5}{2}\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{2n+1}-\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{p+1}\frac{1}{2n+1}=\frac{5}{2}-\frac{5}{2(2p+3)}$. Il y a bien convergence de la série, vers $\frac{5}{2}$.
- Si on tient vraiment à prouver la convergence avant d'essayer de calculer la somme, on peut trouver un équivalent du terme général à coup de développements limités. On peut aussi anticiper le télescopage et calculer directement la somme partielle :

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k-1}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{2}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} + \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, qui converge vers la somme $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

- On constate ici que $e^{-nx} = (e^{-x})^n$. On est donc en présence d'une simple série géométrique de raison e^{-x}. Cette série convergera donc si et seulement si $x > 0$ (condition pour que $e^{-x} \in]-1, 1[$), vers $\dfrac{1}{1-e^{-x}} = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.
- Rien d'évident ici, mais on sait que la suite (F_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 = x + 1$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 5$, et pour racines $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Si on part de $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$, on aura donc $F_n = \alpha \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, avec $F_0 = \alpha + \beta = 0$, et $F_1 = \dfrac{\alpha}{2}(1+\sqrt{5}) + \dfrac{\beta}{2}(1-\sqrt{5}) = 1$, soit $2\alpha\sqrt{5} = 1$, et $\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$, puis $\beta = -\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$. Comme $x_1 > 1$, et $|x_2| < 1$, on obtient $F_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ (le second terme tendant vers 0), puis $\dfrac{1}{F_n} \sim 2\sqrt{5} \left(\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^n$, terme général d'une série géométrique convergente. On en déduit que notre série converge (elle est à termes positifs), mais il n'existe en fait aucun moyen d'en calculer aisément la somme !

Exercice 2 (**)

1. On montre par une récurrence facile que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. En effet, c'est vrai pour u_0, et si on le suppose vrai pour u_n, comme $e^{-u_n} > 0$, on aura bien $u_{n+1} = e^{-u_n} u_n > 0$. De plus, comme $u_n > 0$, on a $e^{-u_n} < 1$, et donc $e^{-u_n} u_n < u_n$. Autrement dit, la suite (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers une certaine limite l. On en déduit que $e^{-u_n} u_n$ tend vers le^{-l}, mais aussi vers l puisque cette expression est égale à u_{n+1}. On en déduit que $l = le^{-l}$, ce qui se produit si $l = 0$ ou si $e^{-l} = 1$, ce qui ne laisse que la possibilité $l = 0$. La suite (u_n) converge donc vers 0.
2. On remarque que $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(e^{-u_n} u_n) = -u_n + \ln u_n = v_n - u_n$, ce qu'on peut aussi écrire $u_n = v_n - v_{n+1}$. On en déduit que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}$ (il y a télescopage).
3. Comme u_n tend vers 0, la suite (v_n) diverge vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, et la série (S_n) diverge donc vers $+\infty$.

Exercice 3 (*)

Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, on sait que son reste converge vers 0. On va tout de même commencer par travailler avec des sommes partielles (ou plutôt des restes partiels). Sur l'intervalle $[k, k+1]$, on a l'encadrement $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$ par décroissance de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$. En intégrant cet encadrement, on obtient $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{1}{x^2}\, dx \leqslant \dfrac{1}{k^2}$, soit $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$ (encadrement qui est en l'occurrence facile à obtenir sans calculer d'intégrale). Si on somme l'inégalité de droite pour k variant entre n (qu'on fixera désormais) et p (qui va ensuite tendre vers $+\infty$), on trouve alors $\displaystyle\sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2} \geqslant \sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{p+1}$ (télescopage dans la somme de droite). De même, en sommant les inégalités de gauche pour k variant entre $n-1$ et $p-1$ (pour avoir des $\dfrac{1}{(k+1)^2}$ variant entre $\dfrac{1}{n^2}$ et $\dfrac{1}{p^2}$), on obtient l'autre inégalité $\displaystyle\sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=n-1}^{p-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{p}$. Autrement dit, on a prouvé que $\displaystyle\frac{1}{n} - \frac{1}{p-1} \leqslant \sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{p}$. En multipliant tout par n, on a donc $\displaystyle 1 - \frac{n}{p-1} \leqslant n \sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{n}{n-1} - \frac{n}{p}$. Lorsqu'on faire tendre p vers $+\infty$ à n fixé, les deux membres extrêmes convergent (mais pas vers 1, attention à la rigueur !), et on en déduit que $\displaystyle 1 \leqslant \lim_{p \to +\infty} n \sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{n}{n-1}$, soit $1 \leqslant nR_n \leqslant \dfrac{n}{n-1}$. On peut maintenant faire tendre n vers $+\infty$ pour trouver, par application du théorème des gendarmes cette fois-ci, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} nR_n = 1$, soit $\displaystyle R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$.

La généralisation se fait exactement de la même façon : sur $[k, k+1]$, $\dfrac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{x^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{k^\alpha}$, ce qui donne par intégration $\dfrac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{(1-\alpha)(k+1)^{1-\alpha}} - \dfrac{1}{(1-\alpha)k^{1-\alpha}} \leqslant \dfrac{1}{k^\alpha}$. Une somme télescopique plus tard, on trouve $\displaystyle\frac{1}{(1-\alpha)(p+1)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(1-\alpha)n^{1-\alpha}} \leqslant \sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{(1-\alpha)p^{1-\alpha}} - \frac{1}{(1-\alpha)(n-1)^{1-\alpha}}$. Comme précédemment, un premier passage à la limite sur p permet d'obtenir l'encadrement $1 \leqslant (1-\alpha)n^{1-\alpha}R_n \leqslant \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{1-\alpha}$, puis le théorème des gendarmes donne l'équivalent $R_n \sim \dfrac{1}{(1-\alpha)n^{1-\alpha}}$.

Exercice 4 (***)

1. On peut commencer par constater assez aisément que la suite (u_n) est décroissante puisque $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$. Cela donne bien envie de tenter de la minorer, par exemple par 0. Prouvons via une petite récurrence que tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $[0; 1]$. C'est vrai pour u_0 par hypothèse. Supposons donc $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on a alors également $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1$, donc $0 \leqslant u_n(1 - u_n) \leqslant 1$.

Or, $u_n(1-u_n) = u_n - u_n^2 = u_{n+1}$. Cette constatation achève la récurrence.
La suite (u_n) étant décroissante minorée, elle converge. Comme $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, on en déduit en prenant la limite de chaque côté que $l = l - l^2$, soit $-l^2 = 0$, ce qui n'est possible que si $l = 0$. On peut en déduire que la suite (u_n) converge vers 0.

2. En revenant à la relation de récurrence, on constate que $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$, d'où $\sum_{k=0}^{k=n} u_k^2 = \sum_{k=0}^{k=n} u_k - u_{k+1} = u_0 - u_{n+1}$ (par télescopage). D'après la question précédente, $\lim_{n\to+\infty} u_0 - u_{n+1} = u_0$, donc la série de terme général u_n^2 converge vers u_0.

3. La somme partielle va également être télescopique : $\sum_{k=0}^{k=n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{k=n} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0)$. Or, toujours en utilisant notre connaissance de la limite de (u_n), on a $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_{n+1}) = -\infty$, ce qui signifie que la série considérée diverge.

4. En reprenant la relation de récurrence définissant la suite, on constate que $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{u_n - u_n^2}{u_n}\right) = \ln(1-u_n) \sim -u_n$ puisque u_n est une suite qui converge vers 0. La série $\sum -u_n$ (qui est à termes négatifs) diverge donc, et $\sum u_n$ également.

Exercice 5 (* à **)

- La série est à termes positifs, de terme général équivalent à $\frac{1}{n^2}$ (terme général d'une série de Riemann convergente), donc converge.
- La série est à termes positifs, et $\frac{1}{e^n + e^{-n}} \sim \frac{1}{e^n}$, terme général d'une série géométrique convergente, donc la série converge.
- Même si on se trompe dans l'équivalent, on tombera sur une série convergente. En l'occurrence, $\frac{1}{n^3 + 2^n} \sim \frac{1}{2^n}$, et la série converge.
- Le terme général ne tend même pas vers 0, puisque $\frac{n^2 + n^4}{2n^4}$ a pour limite $\frac{1}{2}$, donc la série diverge grossièrement.
- Ici, la positivité est évidente, et $\sqrt{\frac{n+2}{n^3 - 4n + 1}} \sim \sqrt{\frac{1}{n^2}} \sim \frac{1}{n}$, donc la série diverge.
- La série est à termes positifs, et $\frac{\ln(n)}{3^n} \leqslant \frac{2^n}{3^n}$ (au moins à partir d'un certain rang), ce qui suffit à assurer la convergence.
- Encore une série qui diverge grossièrement, le terme général tendant vers 1 (en factorisant, on constate que le dénominateur est équivalent à $\ln(3n)$, donc à $\ln(n)$, puisque $\ln(3n) = \ln(n) + \ln(3)$.
- On peut par exemple écrire que $\frac{n^2}{n!} \sim \frac{n(n-1)}{n!} \sim \frac{1}{(n-2)!}$, ce qui assure la convergence de la série. notons qu'on peut très bien calculer sa somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} =$

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 2e.$

- Un peu plus pénible que celui de la ligne du dessus, mais on peut certainement écrire qu'à partir d'un certain rang, $\ln(n) \leqslant n^{\frac{1}{4}}$ (puisque le ln est négligeable par rapport à toute puissance strictement positive), donc $\frac{ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{n^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$, terme général d'une série de Riemann convergente. Ceci assure la convergence de notre série.
- On constate par exemple que $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$ (quantité conjuguée), qui tend certainement vers 0, et assure la divergence grossière de la série proposée.
- C'est beaucoup plus intéressant : $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln(\frac{n}{n+1})}$, avec $n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -n^2 ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -n + \frac{1}{2} + o(1)$. On en déduit que $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = e^{-n} \times e^{-\frac{1}{2}} \times e^{o(1)} \sim \frac{e^{-n}}{\sqrt{e}}$, terme général d'une série géométrique convergente. notre série est donc convergente.
- Ici, le plus simple est de faire une comparaison série-intégrale. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x(\ln(x))^\alpha}$ est continue et décroissante sur $]1,+\infty[$ pour $\alpha > 0$ (si $\alpha \leqslant 0$, la série diverge de toute façon car son terme général est supérieur à celui de la série harmonique). Mieux, on sait calculer $\int_2^n \frac{1}{x(\ln(x))^\alpha}\, dx = \int_2^x \frac{1}{x}(\ln(x))^{-\alpha}\, dx = \frac{1}{1-\alpha}[\ln(x)^{1-\alpha}]_2^n = \frac{\ln(x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + K$. Cette valeur a une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $1-\alpha < 0$, soit $\alpha > 1$. On trouve donc exactement le même critère que pour les séries de Riemann.

Exercice 6 (*)

La série de terme général $\frac{1}{(2k+1)^2}$ converge car son terme général est équivalent à $\frac{1}{4k^2}$. De même pour la série de terme général $\frac{1}{(2k+2)^2}$. On peut donc écrire que la série de terme général $\frac{1}{(2k+2)^2} + \frac{1}{(2k+1)^2}$ converge, et que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{(2k+2)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+2)^2}$. Or, la somme de gauche n'est autre que la somme des inverses des carrés de tous les entiers (on a juste séparé entiers pairs et impairs) qui vaut $\frac{\pi^2}{6}$. Quant à la deuxième somme à droite, elle vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4(k+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6}$. Conclusion : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 7 (**)

1. On sait que $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ (par exemple en utilisant le début du développement limité d'arctangente), donc le terme général de notre série est équivalent à $\dfrac{1}{n^2+n+1}$, puis à $\dfrac{1}{n^2}$, ce qui assure la convergence de notre série (qui est à termes positifs).

2. Calculons la tangente de chacun de ces deux nombres : $\tan\left(\arctan\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)\right) = \dfrac{1}{n^2+n+1}$. D'un autre côté, via la formule d'addition des tangentes, $\tan(\arctan(n+1)-\arctan(n)) = \dfrac{\tan(\arctan(n+1)) - \tan(\arctan(n))}{1+\tan(\arctan(n+1))\tan(\arctan(n))} = \dfrac{1}{1+n^2+n}$. Nos deux nombre ont donc la même tangente, et appartiennent tous les deux à l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (pas croissance de l'arctangente, $\arctan(n+1)-\arctan(n) \geqslant 0$, et cette même valeur est majorée par $\arctan(n+1) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$), donc elles sont égales.

3. Notre série est donc tout simplement télescopique : $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \arctan(p+1) - \arctan(0) = \arctan(p+1)$, qui converge vers $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 8 (***)

1. Effectuons un développement asymptotique de notre expression : $a\sqrt{n-1}+b\sqrt{n}+c\sqrt{n+1} = \sqrt{n}\left(a\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}+b+c\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\right) = \sqrt{a - \dfrac{a}{2n} - \dfrac{a}{8n^2}} - \dfrac{a}{16n^3} + b + c + \dfrac{c}{2n} - \dfrac{c}{8n^2} + \dfrac{c}{16n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right) = (a+b+c)\sqrt{n} + \dfrac{c-a}{2\sqrt{n}} - \dfrac{a+c}{8n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$. Une première condition nécessaire évidente est $a+b+c=0$, sinon la série diverge grossièrement. Si cette condition est vérifiée, et si $a \neq c$, notre terme général est équivalent à $\dfrac{c-a}{2\sqrt{n}}$, terme général d'une série de Riemann divergente, donc la série diverge. On doit donc imposer $c=a$ (et donc $b=-a-c=-2a$), on obtient alors un terme général équivalent à $\dfrac{-a}{4n^{\frac{3}{2}}}$, ce qui suffit cette fois-ci à prouver la convergence de la série, puisqu'on est en présence d'une série de Riemann convergente. Les conditions $c=a$ et $b=-2a$ sont donc nécessaires et suffisantes.

2. On va évidemment faire pareil : $\sqrt{n^2+4n+1} = n\sqrt{1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$
$= n\left(1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) - \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^2 + \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^3 + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)$
$= n\left(1 - \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{2}{n^2} - \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{4}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) = n - 2 - \dfrac{5}{2n} + \dfrac{3}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Pour annuler tous les termes divergents de ce développement asymptotique, il faut donc choisir $a=1$, $b=-2$ et $c=-\dfrac{5}{2}$. On aura alors une équivalence du terme général avec $\dfrac{3}{n^2}$ qui assure la convergence de la série.

3. Allons-y pour un dernier développement asymptotique : $\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3} = n\left(\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}-\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}\right) = n\left(1+\frac{a}{3n^2}-\frac{a}{9n^4}-1-\frac{3}{2n^2}+\frac{3}{8n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = \frac{2a-9}{6n}+\frac{27-8a}{72n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Il faut et il suffit donc que a soit égal à $\frac{9}{2}$ pour que la série converge.

Problème (***)

I. Série exponentielle

1. Cela se fait très bien par récurrence. Pour $n=4$, $2^4=16$ et $4!=24$, donc l'inégalité est vérifiée. Si on suppose que, pour un certain entier supérieur ou égal à 4, $2^n \leqslant n!$, alors $2^{n+1} = 2\times 2^n \leqslant 2\times n! \leqslant (n+1)\times n! = (n+1)!$, ce qui prouve l'hérédité et achève la récurrence.
2. Pour tout les indices de la somme, au vu de la question précédente, on aura $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^k}$, donc $\sum_{k=4}^{k=n}\frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=4}^{k=n}\frac{1}{2^k}$, somme géométrique égale à $\frac{1}{2^4}\sum_{k=0}^{k=n-4}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^4}\frac{1-\frac{1}{2^{n-3}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2^{n-3}}\right) \leqslant \frac{1}{8}$.
3. La série exponentielle est une série à termes positifs, majorée au vu de ce qui précède par $\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{8}$. Elle converge donc, et sa limite l vérifie certainement $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6} \leqslant l \leqslant 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$, soit $\frac{8}{3} \leqslant l \leqslant \frac{64}{27}$.

II. Suites et séries de Cantor

1. On peut écrire (si $p<n$, sinon la somme est bien sûr nulle) $\sum_{k=p+1}^{k=n}\frac{k-1}{k!} = \sum_{k=p+1}^{k=n}\frac{1}{(k-1)!}-\sum_{k=p+1}^{k=n}\frac{1}{k!} = \frac{1}{p!}-\frac{1}{n!}$.
2. On a en effet $S_n - S_p = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{u_k}{k!}-\sum_{k=1}^{k=p}\frac{u_k}{k!} = \sum_{k=p+1}^{k=n}\frac{u_k}{k!}$. Or, par hypothèse, on a toujours $\frac{u_k}{k!} \leqslant \frac{k-1}{k!}$, donc notre expression est bien majorée par la somme calculée précédemment. Par ailleurs, $S_n - S_p \geqslant 0$ puisqu'à partir du rang 2, $\frac{u_k}{k!} \geqslant 0$.
3. En particulier, on aura $\forall n \geqslant 2$, $S_n - S_1 \leqslant 1-\frac{1}{n!} \leqslant 1$, soit $S_n \leqslant S_1 + 1$. La suite S_n étant croissante, elle converge.
4. Il suffit de reprendre l'encadrement de la question 2 : $0 \leqslant S_n - S_p \leqslant \frac{1}{p!}-\frac{1}{n!}$, et de passer à la limite pour obtenir $0 \leqslant S - S_p \leqslant \frac{1}{p!}$, ce qui est équivalent à ce qui nous est demandé.

III. Développement de Cantor d'un réel

1. C'est évident au vu de la définition de u_n, puisque les termes de la suite (p_n) sont des entiers.
2. Les inégalités $p_n \leqslant n!x < p_n + 1$ ne sont que la définition de la partie entière. De même, on aura $p_{n-1} \leqslant (n-1)!x < p_{n-1} + 1$, donc $np_{n-1} \leqslant n!x < n(p_{n-1} + 1)$. Le nombre np_{n-1} étant un entier inférieur à $n!x$, il est nécessairement plus petit que p_n (par définition de la partie entière). De même, $n(p_{n-1} + 1)$ est un entier strictement supérieur à $n!x$, donc supérieur ou égal à $p_n + 1$.
3. Le nombre u_1 est certainement entier. De plus, au vu des inégalités précédentes, on aura toujours $0 \leqslant p_n - np_{n-1}$, et $p_n + 1 \leqslant np_{n-1} + n$, soit $p_n - np_{n-1} \leqslant n - 1$. Autrement dit, $0 \leqslant u_n \leqslant n - 1$, ce qui définit bien une suite de Cantor.
4. On se convainc assez facilement que $S_n = \dfrac{p_n}{n!}$, ce qui se prouve par récurrence : $S_1 = \dfrac{u_1}{1!} = p_1$. Ensuite, si on suppose $S_n = \dfrac{p_n}{n!}$, on aura $S_{n+1} = S_n + \dfrac{u_{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{p_n}{n!} + \dfrac{p_{n+1} - (n+1)p_n}{(n+1)!} = \dfrac{p_n}{n!} + \dfrac{p_{n+1}}{(n+1)!} - \dfrac{p_n}{n!} = \dfrac{p_{n+1}}{(n+1)!}$, ce qui prouve l'hérédité. On peut aussi faire un calcul direct de somme télescopique.
5. En divisant par $n!$ les inégalités de la question 2, on a notamment $\dfrac{p_n}{n!} \leqslant x < \dfrac{p_n}{n!} + \dfrac{1}{n!}$. Une simple application du théorème des gendarmes nous donne donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{p_n}{n!} = x$, et la série (S_n) converge vers x.