

Feuille d'exercices n°20 : Géométrie plane

PTSI B Lycée Eiffel

22 mai 2014

Exercice 1 (*)

On se place dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) et on considère le point $\Omega(1; -1)$ ainsi que les vecteurs \vec{u} de coordonnées $(1; 2)$ et \vec{v} de coordonnées $(-2; 3)$.

1. Montrer que $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère. Est-il orthonormal ?
2. Soient $A(5, 6)$ et \vec{z} le vecteur de coordonnées $(-3; -3)$ dans (O, \vec{i}, \vec{j}) . Calculer leurs coordonnées dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.
3. Déterminer une équation dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ du cercle de centre O et de rayon 1.

Exercice 2 (***)

Soit ABC un triangle, on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, ainsi que p le demi-périmètre du triangle : $p = \frac{a + b + c}{2}$.

1. Démontrer la relation d'Al-Kashi $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{BAC})$.
2. En déduire la valeur de $\sin(\widehat{BAC})$ en fonction de a .
3. Prouver la relation des sinus $\frac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{b}{\sin(\widehat{ABC})} = \frac{c}{\sin(\widehat{ACB})}$.
4. Démontrer la formule de Héron $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, où \mathcal{A} désigne l'aire du triangle ABC .

Exercice 3 (*)

Dans un parallélogramme $ABCD$, prouver la relation $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

Exercice 4 (*)

Démontrer à l'aide d'un calcul de produit scalaire que les hauteurs d'un triangle non aplati sont concourantes.

Exercice 5 (***)

Soit ABC un triangle vérifiant $\overline{AB} = 1$. On se place dans un repère orthonormal dont l'origine est le point A et le premier vecteur \overrightarrow{AB} . On note (x, y) les coordonnées du point C dans ce repère.

1. Calculer les coordonnées de l'isobarycentre G du triangle ABC .
2. Calculer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC .
3. Calculer les coordonnées du centre du cercle circonscrit O du triangle ABC .

4. Vérifier que $\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{OG}$.
5. Montrer que les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle appartiennent à son cercle circonscrit.
6. Montrer que les symétriques de H par rapport aux milieux du triangle appartiennent également à son cercle circonscrit.

Exercice 6 (*)

Déterminer toutes les équations possibles (cartésienne, paramétrique, normale) de chacune des droites suivantes :

- droite d'équation cartésienne $2x - y + 3 = 0$.
- droite passant par les points $A(1; 2)$ et $B(5; 10)$.
- droite orthogonale à la précédente et passant par $C(-1, 3)$.
- droite passant par $D(1, 1)$ et ayant pour vecteur normal $\vec{n}(1, -2)$.

Exercice 7 (**)

On se place dans un repère orthonormal du plan. Pour tout réel a , on définit la droite D_a d'équation $(1 - a^2)x + 2ay + (a^2 - 2a - 3) = 0$. Déterminer tous les points par lesquels passe au moins une droite de la famille. Déterminer tous les points par lesquels passent deux droites perpendiculaires de la famille.

Exercice 8 (*)

Dans un repère orthonormal direct, on considère les points $A(-1, -1)$, $B(2, 3)$ et $C(3, -3)$.

1. Calculer l'aire du triangle ABC .
2. En déduire la distance de A à la droite (BC) .
3. Déterminer une équation de la droite (AB) .
4. En déduire la longueur de la hauteur issue de C , et retrouver ainsi l'aire du triangle ABC .

Exercice 9 (***)

On considère trois points non alignés dans le plan, et une droite (d) coupant respectivement les droites (BC) , (AC) et (AB) en A' , B' et C' . Par le point A' , on mène les parallèles à (AB) et (AC) qui coupent respectivement en D et E la parallèle à (BC) passant par A . On souhaite prouver que les droites $(B'D)$ et $(C'E)$ sont parallèles, et on se place pour cela dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Faire une figure.
2. Que peut-on dire des coordonnées de B' et de C' dans le repère choisi ?
3. Déterminer en fonction de ces coordonnées une équation de (d) , de (BC) , puis les coordonnées des points A' , D et E .
4. Conclure à l'aide d'un calcul de déterminant.

Exercice 10 (**)

Soit ABC un triangle tel que $AB = a$, $BC = 2a$ et $AC = a\sqrt{3}$.

1. Que peut-on dire du triangle ABC ?
2. Déterminer $\{M \mid -4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 6a^2\}$.
3. Déterminer $\{M \mid -4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 0\}$.

Exercice 11 (**)

Dans un repère orthonormal direct, on définit la droite D par l'équation $x + y + 1 = 0$ et, pour tout réel λ , le cercle \mathcal{C}_λ d'équation $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2y + 2 = 0$. Décrire le cercle \mathcal{C}_λ en fonction du paramètre λ puis étudier l'intersection de D et de \mathcal{C}_λ .

Exercice 12 (*)

Dans un repère orthonormal, on considère pour un réel $\lambda > 0$ les deux cercles de centre $(\lambda, 0)$ tangent à l'axe (Oy) et de centre (λ, λ) tangent à l'axe (Ox) . Déterminer les coordonnées des points d'intersection de ces cercles, et leur lieu lorsque λ décrit \mathbb{R}^{+*} .

Exercice 13 (**)

Soit \mathcal{C} le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$, et $A(4; -4)$. On peut mener par le point A deux tangentes au cercle \mathcal{C} . Calculer la distance entre les points d'intersection de ces tangentes et de \mathcal{C} .

Exercice 14 (***)

On utilise dans ce problème la notation \overline{AB} pour désigner la mesure algébrique du segment $[AB]$. Soit \mathcal{C} un cercle du plan de centre O et de rayon R , et M un point du plan, on appelle alors puissance de M par rapport à \mathcal{C} le réel $p_{\mathcal{C}}(M) = OM^2 - R^2$.

1. Supposons que M appartienne à une droite D coupant \mathcal{C} en deux points A et B . On note A' le point diamétralement opposé à A sur \mathcal{C} , montrer que $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MA'} \cdot \overline{MA'} = p_{\mathcal{C}}(M)$.
2. Supposons M extérieur au cercle \mathcal{C} et notons S et T les points de contact de \mathcal{C} avec ses tangentes issues de M . Indiquer une méthode pour construire S et T à la règle et au compas.
3. Montrer que $MT^2 = MS^2 = p_{\mathcal{C}}(M)$.
4. Montrer que quatre points A, B, C et D tels que (AB) et (CD) ne soient pas parallèles (elles se coupent alors en un point noté N) sont cocycliques si et seulement si $\overline{NA} \cdot \overline{NB} = \overline{NC} \cdot \overline{ND}$.
5. On considère désormais deux cercles non concentriques \mathcal{C} et \mathcal{C}' , de centres respectifs O et O' et on note Δ l'ensemble des points M vérifiant $p_{\mathcal{C}}(M) = p_{\mathcal{C}'}(M)$.
 - (a) Soit I le milieu de $[OO']$, montrer que $M \in \Delta \Leftrightarrow \overline{OO'} \cdot \overline{IM} = k$, où k est une constante à préciser.
 - (b) En déduire la nature de Δ (appelée axe radical des deux cercles).
 - (c) Déterminer l'axe radical de deux cercles dans le cas où ils sont sécants en deux points A et B .
 - (d) Déterminer l'axe radical de deux cercles quand ils sont tangents en un point A .
 - (e) Justifier que si trois cercles $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ et \mathcal{C}'' ont des leurs centres O, O' et O'' non alignés, les trois axes radicaux définis à partir de ces trois cercles sont concourants en un point R , appelé centre radical des trois cercles.
 - (f) Décrire une construction géométrique de l'axe radical de deux cercles disjoints, faisant intervenir un troisième cercle sécant aux deux premiers.