Feuille d'exercices n°14 : Espaces vectoriels

PTSI B Lycée Eiffel

10 mars 2014

Exercice 1 (*)

On se place dans l'ensemble E des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (il s'agit bien d'un espace vectoriel). Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E ?

- fonctions paires
- fonctions admettant un minimum global
- fonctions s'annulant une infinité de fois sur $\mathbb{R}$
- fonctions vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x^2)$
- fonctions admettant une tangente horizontale en $x = 5$
- fonctions vérifiant $f''(x) = 3f'(x) - 2f(x)$
- fonctions admettant en $+\infty$ une asymptote (horizontale ou oblique) ou une branche parabolique (de direction (Ox) ou (Oy))

Exercice 2 (*)

Parmi tous les sous-ensembles suivants de $E = \mathbb{R}_3[X]$, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels, donner leur dimension qinsi qu'une base pour chacun d'eux.

1. $\{P \in E \mid P(2) = 0\}$
2. $\{P \in E \mid P(0) = 2\}$
3. $\{P \in E \mid P + P'' = 0\}$
4. $\{P \in E \mid P \in \mathbb{R}_1[X]\}$
5. $\{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$
6. $\{P \in E \mid \displaystyle\int_0^2 P(x)\ dx = 0\}$
7. $\{P \in E \mid \displaystyle\int_0^2 P(x)\ dx = 0 \text{ et } P(1) = 0\}$
8. $\{P \in E \mid P(1) = P'(1) = 0\}$
9. $\{P \in E \mid P(X+1) = 2P(X)\}$

Exercice 3 (**)

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la famille $\mathcal{F}$ est une base de E, et déterminer si possible les coordonnées de x dans $\mathcal{F}$.

1. $E = \mathbb{R}^3$; $\mathcal{F} = ((-1,1,1);(1,-1,1);(1,1,-1))$ et $x = (2,3,4)$.
2. $E = \mathbb{R}_3[X]$; $\mathcal{F} = (1; X; X(X-1); X(X-1)(X-2))$ et $x = X^3$.
3. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} \right)$ et $x = I_4$.
4. $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \geqslant 4,\ u_n = 0\}$; $x = (-2,3,4,1,0,0,\dots)$ (vous avez le choix pour $\mathcal{F}$!).

Exercice 4 (*)

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les deux sous-ensembles $F = \{(x,y,z) \mid 2x + y - 3z = 0\}$ et $G = \{(2a+b, a-b, 3a-b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer qu'il s'agit de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, et déterminer leur intersection $F \cap G$.

Exercice 5 (**)

Dans un espace vectoriel E, on considère trois sous-espaces vectoriels A, B et C.

1. Montrer que $A \cap (B + C) \supset (A \cap B) + (A \cap C)$. L'égalité est-elle nécessairement vérifiée ?
2. A-t-on toujours $A + (B \cap C) = (A + B) \cap (A + C)$?
3. Montrer que $A + (B \cap (A + C)) = (A + B) \cap (A + C)$.

Exercice 6 (*)

On considére les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble des matrices M s'écrivant sous la forme $M = aI + bJ + cK + dL$, avec a, b, c, $d \in \mathbb{R}^4$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel, et que (I, J, K, L) en forme une base.
2. Montrer, en les calculant explicitement, que J^2, K^2, L^2, J^3 et L^3 appartiennent à E.
3. En déduire, sans aucun calcul matriciel, que JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E.
4. Établir enfin que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E.

Exercice 7 (**)

Dans chacun des cas suivants, montrer que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, et qu'ils sont supplémentaires.

- $E = \mathbb{R}^2$; $F = \{(x,y) \mid x + y = 0\}$ et $G = \{(x,y) \mid x - y = 0\}$.
- $E = \mathbb{R}^3$; $F = \{(x,y,z) \mid x - y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((3,2,1))$.
- $E = \mathbb{R}_2[X]$; $F = \mathrm{Vect}(X, X^2)$ et $G = \{P \mid P' = 0\}$.
- $E = \mathbb{R}_6[X]$; $F = \{P \in E \mid P \text{ est une fonction paire}\}$ et $G = \{P \in E \mid P \text{ est une fonction impaire}\}$.
- $E = \mathcal{C}_0([-1;1], \mathbb{R})$; $F = \{f \in E \mid \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = 0\}$ et $G = \{\text{fonctions constantes}\}$.
- $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{R}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0\}$; $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + u_n = 0\}$ et $G = \{(u_n)_{n\in\mathbb{R}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0\}$.

Exercice 8 (**)

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère la famille $\mathcal{F} = ((1,2,0,1); (2,1,3,-1); (4,5,3,1))$.

1. Déterminer si la famille $\mathcal{F}$ est libre, et donner une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
2. Décrire $\mathcal{F}$ comme ensemble des solutions d'un système d'équations à déterminer.

3. On note G l'ensemble des solutions du système $\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & & & + & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$. Déterminer une base de G, ainsi que sa dimension.
4. Montrer que $\mathbb{R}^4 = \text{Vect}(\mathcal{F}) \oplus G$. Déterminer la décomposition dans $\text{Vect}(\mathcal{F}) \oplus G$ du vecteur $(6, 10, 8, 2)$.

Exercice 9 (*)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont on précisera une base et la dimension.
2. Même question pour $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

Exercice 10 (***)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace E de dimension finie, qui vérifient $\dim(F) = \dim(G)$.

1. Montrer que $F \cap G$ admet un supplémentaire F' dans F et un supplémentaire G' dans G qui sont de même dimension.
2. Montrer que F' et G' ont une intersection réduite au vecteur nul.
3. En considérant des bases de F' et G', construire un supplémentaire commun à F et G dans $F + G$.
4. Montrer qu'il existe un supplémentaire commun à F et G dans E.

Exercice 11 (***)

On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{S}$ le sous-espace constitué des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ celui constitué des matrices antisymétriques.

1. Donner la dimension de $\mathcal{S}$ et celle de $\mathcal{A}$, ainsi qu'une base de chacun de ces sous-espaces.
2. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices de trace nulle. Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donner sa dimension, ainsi qu'une base.
3. On note désormais M l'ensemble des matrices dont la somme des coefficients sur chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est la même. Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Déterminer la dimension et une base de M.
5. Déterminer la dimension de $\mathrm{M} \cap \mathcal{S}$, donner un exemple de matrice symétrique appartenant à M, dont le coefficient sur la première ligne, première colonne vaut 1.
6. Déterminer la dimension de $\mathrm{M} \cap \mathcal{A}$, donner un exemple de matrice antisymétrique appartenant à M, dont le coefficient sur la première ligne, troisième colonne vaut 1.
7. Montrer qu'il n'existe qu'une seule matrice dans M dont la première ligne est constituée des nombres 1, 2 et 3 (dans cet ordre), et donner cette matrice.