Feuille d'exercices n°6 : Équations différentielles

PTSI B Lycée Eiffel

14 novembre 2013

Exercice 1 (* à **)

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes (aucun des calculs de cet exercice ne nécessite de technique spéciale sur les fractions rationnelles ou autres) :

- $f(x) = \dfrac{1}{(1-2x)^3}$
- $f(x) = \cos(x)\sin(x)$
- $f(x) = \arctan(x)$
- $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}$
- $f(x) = x\sin^3(x)$
- $f(x) = x\sqrt{1+2x^2}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x + x\ln^2(x)}$
- $f(x) = \operatorname{ch}(x)\cos(x)$
- $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$
- $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$
- $f(x) = \ln(1+x^2)$
- $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

Exercice 2 (* à **)

Calculer les intégrales suivantes (aucun des calculs de cet exercice ne nécessite de technique spéciale sur les fractions rationnelles ou autres) :

- $\displaystyle\int_0^1 (x-2)(x+1)^5\ dx$
- $\displaystyle\int_1^e x^2(\ln x)^3\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \operatorname{ch}^2(x)\operatorname{sh}^2(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_1^e x\ln^2(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\ dx$
- $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\ dx$
- $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}\ dx$

Exercice 3 (** à ***)

Calculer les intégrales et primitives suivantes (en appliquant les quelques recettes vues en cours sur les fractions rationnelles) :

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x(x+1)}\ dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)}\ dx$
3. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-4x+3}\ dx$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\,dx$
5. $\displaystyle\int \arctan\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\,dx$

Exercice 4 (* à **)

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant à chaque fois le ou les intervalles de résolution choisis :

1. $y' - 2y = \sinh(x) - 2x\cosh(x)$.
2. $ty' + y = \cos(t)$.
3. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^t}$.
4. $y' + y = (x^2 - 2x + 2)e^{2x}$.
5. $xy'\ln x - y = 3x^2\ln^2 x$.
6. $y' + 2y = x^2$.
7. $y' + x^2y + x^2 = 0$. Déterminer une solution vérifiant $y(0) = 0$.
8. $\sqrt{1-x^2}y' - y = 1$.
9. $2ty' + y = t^n$ $(n \in \mathbb{N})$.
10. $y' + y = \sin(x) + \sin(2x)$.
11. $y' - 3y = x^2e^x + xe^{3x}$ en imposant de plus $y(0) = 1$.
12. $\cosh(x)y' - \sinh(x)y = \sinh^3(x)$.

Exercice 5 (*)

On cherche les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x^2y' + xy = 1$. Commencer par résoudre cette équation sur chacun des intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. Conclure.

Exercice 6 (**)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x) + 2\displaystyle\int_0^x e^{x-t}f(t)\,dt$.

Exercice 7 (**)

Résoudre l'équation différentielle $(1+t^2)y' = 4ty + 4t\sqrt{y}$ (on pourra poser $z = \sqrt{y}$ et chercher une équation différentielle plus ordinaire vérifiée par z). Cette équation différentielle est un cas particulier d'équation de Bernoulli.

Exercice 8 (**)

Déterminer les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant jamais et vérifiant $y' + 3y + y^2 = 0$ (on pourra poser $z = \dfrac{1}{y}$). Cette équation est un cas particulier d'équation de Ricatti.

Exercice 9 (**)

Résoudre l'équation différentielle $(yy'' - (y')^2)\sin^2 x + y^2 = 0$ (on pourra poser $u = \dfrac{y'}{y}$).

Exercice 10 (*)

On considère l'équation différentielle $y' = y^2 + 1$, avec comme condition initiale $y(0) = 0$. Déterminer une valeur approchée de $y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler avec pas $h = \frac{1}{4}$, puis $h = \frac{1}{10}$. Comparez avec la valeur exacte (si, si, vous la connaissez). Qu'en pensez-vous ?

Exercice 11 (* à ***)

Résoudre les équations différentielles du deuxième ordre suivantes :

1. $y'' + 4y = x^2 - x + 1$.
2. $y'' + y' = 4x^2e^x$, avec $y(0) = e$ et $y'(0) = 0$.
3. $y'' + y' + 2y = (8x + 1)e^x$.
4. $y'' - y = \sinh(x)$.
5. $y'' - 3y' + 2y = (-3t^2 + 10t - 7)e^t$.
6. $y'' - 2y' + 5y = 4e^t \sin(2t)$.

Exercice 12 (**)

On considère l'équation $x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x^2}$, qu'on cherche à résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$. En posant $z(x) = y(e^x)$, déterminer une équation différentielle du second ordre à coefficients constants vérifiée par z. En déduire les solutions de l'équation initiale, et prouver qu'il en existe une seule vérifiant $y(1) = y'(1) = 0$. Ce type d'équation est appelé équation d'Euler.

Exercice 13 (**)

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4ty' + (11 + 4t^2)y = 0$ en posant $z(t) = e^{t^2}y(t)$.

Exercice 14 (***)

Résoudre les équations suivantes en effectuant le changement de variable proposé :

1. $4xy'' + 2y' - y = 0$ (on posera $t = \sqrt{x}$).
2. $(1 + x^2)^2y'' + 2x(1 + x^2)y' + 4y = 0$ (on posera $t = \arctan(x)$).
3. $x^2y'' + 3xy' + y = x^2$ (on posera $t = \ln(x)$ et on résoudra seulement sur $\mathbb{R}^{+*}$).

Exercice 15 (***)

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2f(-x) + x$.

Exercice 16 (***)

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) + f(x - y) = 2f(y)f(x)$ (utiliser une méthode proche de celle vue en cours pour la caractérisation des exponentielles, mais en dérivant deux fois).