Feuille d'exercices n°9 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

13 janvier 2014

Exercice 1 (*)

1. Si on tient vraiment à utiliser les outils du cours, il y en a $\binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{5}{1} = 60$.
2. On va supposer qu'il prend deux entrées différentes, ce qui laisse $\binom{4}{2} \times 3 = 18$ possibilités.
3. On a désormais $\binom{4}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{5}{2} = 6 \times 3 \times 10 = 180$ possibilités.

Exercice 2 (**)

Commençons par remarquer qu'il y a au total $13^4 = 28\ 561$ tirages possibles (ce sont des listes).

- Au moins une boule blanche : on passe par le complémentaire, il y a 8^4 tirages ne comportant que des boules noires, donc $13^4 - 8^4 = 24\ 465$ tirages avec au moins une boule blanche.
- Au plus une boule noire : on sépare en deux cas. Il y a soit zéro boule noire (5^4 cas) soit une boule noire ($5^3 \times 8 \times \binom{4}{1}$, le coefficient binomial étant là pour le choix de la position de la boule noire), donc $5^4 + 5^3 \times 8 \times \binom{4}{1} = 4\ 625$ tirages au total.
- Trois boules noires puis une blanche : $8^3 \times 5 = 2\ 560$ tirages (pas de choix pour l'ordre ici).
- Deux noires et deux blanches : $8^2 \times 5^2 \times \binom{4}{2} = 9\ 600$ tirages possibles (encore une fois, le coefficient binomial correspond au nombre de choix pour les deux boules blanches sur les quatre tirages).

Exercice 3 (**)

Il y a au total $\binom{21}{5}$ tirages possibles.

- Il y a 17 atouts qui ne sont pas multiples de 5, donc $\binom{17}{5}$ tirages qui ne contiennent aucun multiple de 5. Par passage au complémentaire, il reste donc $\binom{21}{5} - \binom{17}{5}$ tirages avec au moins un multiple de 5.
- Un multiple de cinq et un de trois : il faut distinguer le cas où on tire le 15 (qui est le seul multiple de cinq et de trois à la fois) et celui où les deux multiples sont différents. Sachant qu'il y a onze atouts qui ne sont multiples ni de cinq ni de trois, on a $\binom{11}{4} + \binom{6}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{11}{3}$ tirages possibles.
- Ni le 1 ni le 21 : par passage au complémentaire, $\binom{21}{5} - \binom{19}{5}$ tirages.

Exercice 4 (*)

1. On a assez simplement $|A\backslash B| = |A| - |A \cap B| = 112 - 67 = 45$.
2. Il suffit de faire une somme : $|C| = |A \cap C| + |(B \cap C)\backslash A| + |C\backslash(A \cup B)| = 32 + 5 + 56 = 93$.
3. Ceux qui ont voté pour au moins l'un des trois sont au nombre de $|A \cup B \cup C| = |A| + |B\backslash A| + |C\backslash(A \cup B)| = 112 + 22 + 56 = 190$. Il en reste donc 10 qui n'ont voté pour aucun des trois.
4. $A\backslash(B \cup C) = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 112 - 67 - 32 + 12 = 25$.

Exercice 5 (** à ***)

- Aucune condition : $\binom{32}{5} = 201\ 376$ tirages.
- Deux Rois : $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3} = 19\ 656$ (on choisit deux cartes parmi les quatre Rois et trois parmi les 28 cartes ne sont pas des Rois).
- Au moins un pique : par passage au complémentaire, $\binom{32}{5} - \binom{24}{5} = 158\ 872$
- Un As et deux carreaux : il faut distinguer le cas de l'As de carreau, ce qui fait $\binom{7}{1} \times \binom{21}{3}$ (l'As de carreau ; un autre carreau parmi les sept restants ; et trois cartes parmi les 21 qui ne sont ni des carreaux ni des As) $+\binom{3}{1} \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{2}$ (un As qui n'est pas un carreau, deux carreaux qui ne sont pas des As, et trois autres cartes qui ne sont ni des carreaux ni des As), soit 22 540 tirages.
- Pas de carte en-dessous du 9 : $\binom{24}{5} = 42\ 504$ tirages (il y a 24 cartes au-dessus du 9).
- Deux paires : il faut choisir les hauteurs des deux paires (parmi huit possibles), puis les couleurs des deux cartes pour chaque paire, et enfin la dernière carte, soit $\binom{8}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{24}{1} =$ 24 192 tirages.
- Cinq cartes de la même couleur : 4 choix pour la couleur, puis 5 cartes à choisir parmi les 8 de la couleur, soit $4 \times \binom{8}{5} = 224$ tirages possibles.
- Quinte flush : 16 tirages (là, on peut compter à la main).

Exercice 6 (***)

1. Il y a $\binom{6}{2}$ parties à 2 éléments dans E (c'est la définition d'un coefficient binomial !). Soit A l'une d'entre elles, par exemple $A = \{1; 2\}$. Une partie B vérifiant $A \cup B = E$ doit nécessairement contenir 3, 4, 5 et 6 (puisqu'ils ne sont pas dans A, et un sous-ensemble quelconque de $\{1; 2\}$. Il y a donc 2^2 telles parties B (pour chaque A possible).
2. De la même façon, si A est une partie à k éléments, B doit nécessairement contenir les éléments qui ne sont pas dans A, et un quelconque sous-ensemble des k éléments de E, ce qui laisse 2^k possibilités pour B (on a, pour chaque élément de A, 2 possibilités : soit on le prend, soit on ne le prend pas). Pour $k = 0$, c'est-à-dire si $A = \emptyset$, on a bien une seule possibilité pour B (E tout entier), pour $k = 1$, il y en a 2 (soit B contient l'unique élement de A, soit non), etc, jusqu'au cas où $k = 6$, c'est-à-dire $A = E$, où on peut prendre pour B n'importe quel sous-ensemble de E, ce qui laisse 2^6 possibilités.

3. Au total, il y a $\binom{6}{0} \times 2^0 + \binom{6}{1} \times 2^1 + \dots + \binom{6}{6} \times 2^6$ possibilités, soit $\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 2^k 1^{n-k}$. On reconnait une formule du binôme, qui vaut $(2+1)^6 = 3^6 = 729$.

4. Exactement de la même façon, on obtiendra $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$ possibilités, soit 3^n. Une autre façon de trouver ce résultat est de constater que, pour chacun des n éléments, on a trois possibilités : soit il appartient seulement à A, soit seulement à B, soit à $A \cap B$ (il n'a pas le droit de n'appartenir ni à A ni à B si on veut avoir $A \cup B = E$).

Exercice 7 (*)

Application directe de l'exemple vu en cours : il y a $\frac{10!}{4! \times 4!} = 6\ 300$ anagrammes pour MISSISSIPI et $\frac{11!}{5! \times 2! \times 2!} = 83\ 160$ pour ABRACADABRA.

Exercice 8 (**)

Pas vraiment de méthode générale, on va dénombrer au cas par cas :
- s'il n'y a pas d'ex æquo, $4! = 24$ classements.
- s'il y a quatre ex æquo, 1 classement.
- s'il y a trois ex æquo, $\binom{3}{4} \times 2 = 8$ classements (il faut choisir les trois ex æquo, et leur classement).
- s'il y a deux ex æquo, $\binom{2}{4} \times 3! = 36$ classements.
- enfin, s'il y a deux fois deux ex æquo, $\binom{4}{2} = 6$ classements (il suffit de choisir les deux ex æquo de tête).

Il y a donc au total 75 classements possibles.

Exercice 9 (*)

Du calcul brutal utilisant bien entendu la formule du binôme de Newton : $(x-3)^5 = x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243$; $(2x+3y)^3 = 8x^3 + 36xy^2 + 54xy^2 + 27y^3$ et $(x-1)^7 = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$.

Exercice 10 (***)

La première (une fois ajouté le coefficient binômial manquant) est une application directe du binôme : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^n = 0$. Pour la deuxième, il est en fait plus facile d'utiliser une des formules vues en cours, sachant qu'on peut oublier $k = 0$ dans la somme puisque le terme est nul : $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n \times 2^{n-1}$. Enfin, pour la dernière, on utilise la même astuce mais en commençant par calculer une autre somme : $\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} = n \sum_{k=2}^{n} (k-1) \binom{n-1}{k-1} =$

$n\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n-1}{k} = n\sum_{k=1}^{n-1}(n-1)\binom{n-2}{k-1} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} = n(n-1)2^{n-2}$. Maintenant, reste à remarquer que $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}(k(k-1)+k)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$.

Exercice 11 (*)

C'est un calcul ignoble (on multiplie par 2 pour ne pas avoir de fraction) : $2\left(\binom{n}{2} - \binom{n-p}{2} - \binom{n-q}{2} + \binom{n-p-q}{2}\right) = n(n-1) - (n-p)(n-p-1) - (n-q)(n-q-1) + (n-p-q)(n-p-q-1) = n^2 - n - n^2 + np + n + np - p^2 - p - n^2 + nq + n + nq - q^2 - q + n^2 - np - nq - n - np + p^2 + pq + p - nq + pq + q^2 + q = 2pq$, d'où le résultat.

Exercice 12 (**)

1. On a k cases à noircir sur un total de np, donc $\binom{np}{k}$ grilles possibles.
2. Il reste $k-4$ cases à noircir parmi $np-4$, donc $\binom{np-4}{k-4}$ (naturellement, on doit avoir $k \geq 4$).
3. Il faut choisir les deux coins, puis noircir $k-2$ cases parmi les $np-4$ qui ne sont pas des coins, donc $\binom{4}{2} \times \binom{np-4}{k-2}$ possibilités.
4. Cela suppose que $k \leq n$. Il faut alors choisir les k lignes contenant une case parmi les n possibles, puis il reste pour chacune de ces lignes p choix pour la case à noircir, donc $\binom{n}{k} \times p^k$ grilles possibles.
5. La grille a donc n lignes et n colonnes, et on cherche à noircir une case par ligne, sans en mettre deux dans la même colonne. Il y a n choix possibles pour la case à noircir sur la première ligne, $n-1$ choix pour la case de la deuxième ligne (il ne faut pas la mettre dans la même colonne que la première), $n-2$ pour la troisième etc. Quand on arrive à la dernière ligne, on n'a plus le choix pour la dernière case à noircir (il ne reste qu'une seule colonne vierge). On a donc $n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = n!$ grilles possibles.
6. On aurait 9! choix s'il n'y avait pas la condition supplémentaire sur les petits carrés. Le mieux est de recommencer une raisonnement similaire à celui de la question précédente :
   - il y a 9 possibilités pour le 1 de la première ligne.
   - il y a seulement 6 possibilités ensuite pour le 1 de la deuxième ligne (trois cases à éviter qui sont dans le même petit carré que le premier 1).
   - plus que 3 possibilités pour la troisième ligne (un seul petit carré vierge en haut de la grille).
   - à nouveau 6 possibilités pour la quatrième ligne (plus de problème de petit carré, mais tout de même trois colonnes à éviter).
   - 4 pour la cinquième ligne (deux colonnes libres dans deux petits carrés).
   - 2 pour la sixième (deux colonnes dans le dernier petit carré médian).
   - 3 sur la septième ligne (plus que trois colonnes libres).
   - 2 et 1 pour les deux dernières.

   Soit $9 \times 6 \times 3 \times 6 \times 4 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 46\ 656$ façons de placer les 1.
7. Au total, il y a $\binom{81}{9}$ façons de placer neuf 1 dans une grille de 81 cases, soit 260 887 834 350 possibilités. La proportion de placements « Sudoku-compatibles » est donc extrêmement faible !

Exercice 13 (**)

1. - Pour $n = 1$, le seul mot terne est a.
   - Pour $n = 2$, un mot terne devrait commencer et finir par a, tout en ayant ses deux lettres (qui sont adjacentes) distinctes, c'est impossible. Il n'y a donc pas de mot terne de longueur 2.
   - Pour $n = 3$, le mot doit commencer et finir par a, et la lettre médiane ne doit pas être un a, ce qui laisse les deux possibilités aba et aca.
   - Pour $n = 4$, les deux lettres médianes ne peuvent à nouveau être des a (elles cotoient soit le a initial soit le a final), et doivent en plus être distinctes, ce qui ne laisse que les deux possiblités $abca$ et $acba$.
   - Pour $n = 5$, on peut choisir de mettre un a en lieu de mot, auquel cas les deuxième et quatrième lettre peuvent être un b ou un c indépendamment l'une de l'autre ; mettre un b au milieu, ce qui impose de l'encadrer par deux c (puisque ces lettres cotoient à la fois un a et un b) ; ou enfin un c médian encadré par deux b. Cela fait un total de 6 possibilités : $ababa$, $abaca$, $acaba$, $acaca$, $acbca$ et $abcba$.
   - Pour $n = 6$, soit on met un a en troisième, on a deux possibilités pour la deuxième lettre (cf le cas $n = 2$), et deux pour les lettres 4 et 5 (cf le cas $n = 3$) ; soit on met un a en quatrième, ce qui donne quatre autres possibilités ; soit on ne met pas du tout de a en-dehors des extrêmités, et on a deux possibilités (on alterne des b et des c en commençant par l'un ou l'autre). Soit un total de 10 mots ternes de longueur 6 : $ababca$, $abacba$, $acabca$, $acacba$, $abcaba$, $acbaba$, $abcaca$, $acbaca$, $abcbca$ et $acbcba$.
2. Considérons donc l'ensemble des mots termes de longueur n, pour un certain entier $n \geq 3$, et séparons-les en deux catégories selon la nature de la lettre placée en position $n-2$ dans le mot.
   - s'il s'agit d'un a, le mot obtenu en supprimant les deux dernières lettres de notre mot était déjà terme (il commençait et finissait par a, et ne pouvait certainement pas avoir deux lettres consécutives identiques si on veut que notre mot à nous soit terne). Par ailleurs, les deux dernières lettres de notre mot sont soit ba, soit ca. Réciproquement, à tout mot terne de longueur $n-2$, on peut bien associer deux mots ternes de longueur n en ajoutant soit ba soit ca à la fin du mot. Cette construction nous donne déjà $2 \times t_{n-2}$ mots ternes de longueur n.
   - si au contraire notre lettre numéro $n - 2$ n'est pas un a, mais par exemple un b, alors notre mot s'achève nécessairement par bca (s'iul s'agit d'un c il s'achève par cba et le raisonnement est le même). Considérons alors le mot obtenu en supprimant l'avant-dernière lettre de notre mot (ici le c), on retombe alors sur un mot terne (de longueur $n-1$) car on n'a sûrement pas fait apparaitre de lettres adjacentes identiques. Réciproquement, à partir de n'importe quel mot terne de longueur $n-1$, on peut en construire un (et un seul) en insérant la bonne lettre en avant-dernière position : si le mot de longueur $n - 1$ finit par ba, on introduit un c entre le b et le a ; s'il finit par ca, on introduit un b. On obtient ainsi exactement t_{n-1} nouveaux mots ternes de longueur n, qui sont évidemment distincts des précédents (puisque la lettre numéro $n - 2$ n'est pas la même).

   Globalement, on a bien trouvé $2t_{n-2} + t_{n-1}$ mots ternes de longueur n, soit $t_n = 2t_{n-2} + t_{n-1}$.
3. On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $x^2-x-2 = 0$, elle a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, et admet donc deux racines $r = \dfrac{1+3}{2} = 2$, et $s = \dfrac{1-3}{2} = -1$. On peut donc écrire t_n sous la forme $t_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n$, où α et β sont deux constantes déterminées par les deux premiers termes de la suite. Ici, $t_1 = 2\alpha - \beta = 1$, et $t_2 = 4\alpha + \beta = 0$. En additionnant les deux équations, on obtient $6\alpha = 1$, soit $\alpha = \dfrac{1}{6}$; puis $\beta = 2\alpha - 1 = -\dfrac{2}{3}$. Finalement, $t_n = \dfrac{1}{6} \times 2^n - \dfrac{2}{3} \times (-1)^n = \dfrac{2^{n-1} - 2(-1)^n}{3}$.

Problème

1. Il n'y a qu'une seule partition de E_1. Pour E_2, on a deux possibilités : soit regrouper les deux éléments (un seul sous-ensemble dans la partition), soit les séparer (deux sous-ensembles). Enfin, pour E_3, on peut regrouper les trois éléments (un seul sous-ensemble), les séparer tous les trois, ou faire une partition en deux sous-ensembles dont l'un contient un élément et l'autre les deux qui restent (trois possibilités selon le choix de l'élément isolé). Il y a donc cinq partitions différentes de E_3.
2. S'il y a n sous-ensembles non vides et disjoints, chacun doit comporter exactement 1 élément, et il n'y a donc qu'une seule partition possible. S'il y a $n-1$ sous-ensembles, ils contiennent tous un élément, sauf un qui en contient deux. Il faut donc choisir quels sont les deux éléments qui sont regroupés, ce qui laisse $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ partitions.
3. Il y a deux types de partitions : celles qui ont 7 sous-ensembles réduits à un élément et le huitième qui en contient 3 (au nombre de $\binom{10}{3}$, de manière similaire à la question précédente) ; et celles qui ont 6 sous-ensembles réduits à deux éléments et les deux derniers qui en contiennent 2. Ces dernières sont au nombre de $\frac{1}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}$ (il faut choisir les deux éléments du premier ensemble, les deux du deuxième parmi ceux qui restent, et diviser par deux car l'ordre n'est pas important). Au total donc, $\binom{10}{3} + \frac{1}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}$ partitions.
4. Le même raisonnement conduit à $\binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$.
5. (a) Il faut tout simplement choisir l'élément isolé, et il y a n possibilités pour cela, ou si l'on préfère $\binom{n}{1}$ possibilités.

   (b) De la même façon, il faut choisir les deux éléments du premier ensemble, soit $\binom{n}{2}$ partitions possibles.

   (c) En général, on aura $\binom{n}{k}$ partitions en deux sous-ensembles dont l'un contient k éléments. Attention tout de même, k est compris entre 1 (le premier ensemble n'a pas le droit d'être vide) et $n-1$ (le deuxième ne doit pas être vide non plus !). Autre piège, si on fait la somme pour k variant entre 1 et $n-1$, on compte en fait deux fois chaque partition (en effet, on obtient la même partition en échangeant le rôle du premier et du deuxième ensemble : par exemple, les partitions obtenues pour $k=1$ sont les mêmes que celles obtenues pour $k=n-1$). Il y a donc au total $\frac{1}{2}\sum_{k=1} k = n-1 \binom{n}{k} = \frac{1}{2}(2^n-2) = 2^{n-1}-1$ partitions en deux sous-ensembles.
6. (a) Si E est constitué de $2\times 1 = 2$ éléments, il n'y a qu'une façon de le partitionner en sous-ensembles à deux éléments, donc $a_1 = 1$. Si E a quatre éléments, on peut le partitionner de trois façons en deux paires (il faut choisir qui on case avec le premier élément, l'autre paire est alors imposée), donc $a_2 = 3$. Enfin, si E contient 6 éléments, on a cinq choix pour l'élément à caser avec 1, et enuite trois possibilités à chaque fois pour apparier les quatre éléments restants, donc $a_3 = 5\times 3 = 15$.

   (b) On fait comme ci-dessus : si E contient $n = 2p$ éléments, on commence par choisir l'élément qu'on va apparier avec 1, ce pour quoi on a $n-1 = 2p-1$ choix. Une fois ce choix fait, il reste à partitionner les $n-2 = 2p-2 = 2(p-1)$ éléments restants en paires, ce pour quoi on a par définition a_{p-1} possibilités. Cela laisse bien $(2p-1)a_{p-1}$ possibilités pour séparer E en paires, donc $a_p = (2p-1)a_{p-1}$.

(c) D'après la question précédente, on a $a_p = (2p-1) \times a_{p-1} = (2p-1) \times (2p-3)a_{p-2} = (2p-1) \times (2p-3) \times \cdots \times 5 \times 3$ (ce qui est cohérent avec les calculs de a_2 et a_3). Autrement dit $a_p = \dfrac{(2p) \times (2p-1) \times \cdots \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 4 \times 2} = \dfrac{(2p)!}{2 \times p \times 2 \times (p-1) \times \cdots \times 2 \times 2 \times 2 \times 1} = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}$.

(d) Le nombre demandé est exactement $a_{10} = \dfrac{20!}{2^{10} \times 10!} = 19 \times 17 \times \cdots \times 5 \times 3 = 654\ 729\ 075$. Si on ne considère que des couples hétéro avec 10 filles et 10 garçons, la première fille (soyons galants) a 10 choix pour son compagnon, la deuxième n'en a plus que 9 etc, et la dernière fille n'a plus le choix (ceci n'est pas censé modéliser ce qui se passe dans la vraie vie), soit $10! = 3\ 628\ 800$ possibilités. Autrement dit, si on apparie aléatoirement 10 filles et 10 garçons, on à peine plus d'une chance sur 200 d'obtenir dix couples hétérosexuels.